Studia Semiotyczne, t. XXXII, nr 2 (2018), s. 107–129
ISSN 0137-6608, e-ISSN 2544-073X
DOI: 10.26333/sts.xxxii2.07
Rozprawa

Krzysztof Wójtowicz*

KATEGORIA WYJAŚNIANIA W FILOZOFII MATEMATYKI KURTA GÖDLA[1]

Streszczenie: Artykuł dotyczy zagadnienia, w jakim sensie można stosować kategorię wyjaśnienia (charakterystyczną raczej dla nauk empirycznych) do interpretacji filozofii matematyki Kurta Gödla. Gödel – jako realista matematyczny – twierdzi bowiem, że w wypadku matematyki mamy do czynienia z niezależnymi od nas faktami. Jednym z owych faktów jest właśnie rozwiązywalność wszystkich dobrze postawionych problemów matematycznych – i ten fakt domaga się wyjaśnienia. Kluczem do zrozumienia stanowiska Gödla jest identyfikacja założeń, na których się opiera: (1) metafizyczny realizm: istnieje uniwersum matematyczne, ma ono charakter obiektywny, niezależny od nas; (2) optymizm epistemologiczny: jesteśmy wyposażeni w wystarczająco dobre środki poznawcze, aby uzyskać wgląd w owo uniwersum. Pojęcie rozwiązania problemu matematycznego Gödel rozumie znacznie szerzej niż jako podanie matematycznego dowodu – chodzi raczej o znalezienie wiarogodnych aksjomatów, prowadzących do rozwiązania. Stawiany w artykule problem analizuję na przykładzie hipotezy kontinuum.

Słowa kluczowe: realizm matematyczny, wyjaśnianie w matematyce, twierdzenia o niezupełności, uniwersum matematyczne, hipoteza kontinuum.

Jedną z tez stawianych przez Gödla jest teza o rozwiązywalności wszystkich dobrze postawionych problemów matematycznych. Z punktu widzenia doświadczeń w zakresie „codziennej" matematyki

* Uniwersytet Warszawski, Instytut Filozofii. E-mail: wojtow@uw.edu.pl. ORCID: 0000-0002-1187-8762.

[1] Artykuł został napisany w ramach grantu NCN 2016/21/B/HS1/01955.

(w tym szkolnej), teza ta wydaje się oczywista: każde zadanie da się rozwiązać, nawet bardzo trudne problemy otwarte w końcu ustępują pod naporem wysiłków generacji matematyków.

Jednak to przecież Gödel jest autorem twierdzenia, zgodnie z którym dla każdej (rozsądnej) teorii *T* istnieją zdania, które w tej teorii są nierozstrzygalne. Jak pogodzić ów wynik z jego tezą o powszechnej rozwiązywalności problemów? Aby odpowiedzieć na to pytanie, konieczna jest pewna eksplikacja pojęcia rozwiązania problemu matematycznego. Wtedy możliwe będzie przeanalizowanie tezy, zgodnie z którą każdy problem miałby być rozstrzygalny. Jak to wyjaśnić – i jakie wyjaśnienie tego stanu rzeczy podaje Gödel?

Sądzę, że użycie tutaj kategorii wyjaśniania jest zasadne. Jest ono coraz częściej i szerzej dyskutowane w odniesieniu do matematyki – tutaj będzie miało pewną specyfikę, jednak sądzę, że jego użycie pozwoli rzucić nowe światło na zagadnienie.

Artykuł ma następującą strukturę:

1. Filozofia matematyki Gödla
2. Problem wyjaśniania w matematyce
3. Przykład hipotezy kontinuum
4. Podsumowanie

W części 1. wskazuję podstawowe elementy filozoficznego światopoglądu Gödla. Prezentacja jest oczywiście – z konieczności – skrótowa. W części 2. formułuję podstawowe pytania, jakie stawiane są w debacie, wspominam także krótko o problemie matematycznych wyjaśnień w naukach przyrodniczych – oraz formułuję tytułowe pytanie/a. Część 3. poświęcona jest analizie zagadnienia na podstawie standardowego i znanego przykładu – a mianowicie hipotezy kontinuum. Artykuł kończy się krótkim podsumowaniem.

1. Filozofia matematyki Gödla[2]

Gödel był niejako wzorcowym platonikiem matematycznym. Jego zdaniem istnieje obiektywne, niezależne od nas matematyczne uniwersum, które jest opisywane (choć oczywiście w niedoskonały sposób)

[2] Jest to bardzo szkicowa i skrótowa prezentacja. Szczegółowa analiza stanowiska filozoficznego Gödla zawarta jest np. w pracach Krajewskiego (2003) i Wójtowicza (2002).

przez teorie matematyczne – i do którego mamy dostęp poznawczy przez swoistą intuicję[3]. Gödel skupiał się na teorii mnogości, i jego filozoficzne analizy odwołują się często do teorii mnogości[4].

Poglądy Gödla dotyczące natury matematyki w naturalny sposób łączą się z szerszą wizją, dotyczącą roli i natury filozofii. Gödel podkreślał znaczenie analiz o charakterze fundamentalnym, w szczególności analiz dotyczących znaczenia podstawowych pojęć metafizycznych. Miał nawet nadzieję, iż pojęcia te będzie mógł opisać w sposób zaksjomatyzowany[5]. Warto podkreślić wyraźną opozycję wobec dominującej wówczas neopozytywistycznej wizji matematyki (i filozofii, w szczególności metafizyki). Gödel twierdził wręcz, że „duch czasów" (*Zeitgeist*) nie jest przychylny dla jego poglądów, zgodnie z którymi rozważania metafizyczne są sensowne, a matematyka nie jest składnią języka nauki, lecz wyraża obiektywne prawdy. Konwencjonalizm nie jest więc dobrym wyjaśnieniem natury matematyki; konwencje są oczywiście w matematyce obecne, jednakże nie mają charakteru arbitralnego, lecz – mówiąc swobodnie – oddają istotę pojęć i wyrażają obiektywne prawdy[6].

---

[3] „Niezależnie jednak od tego, że obiekty teorii mnogości są tak odległe od doświadczenia zmysłowego, w jakiś sposób je postrzegamy, o czym świadczy fakt, że aksjomaty narzucają się nam jako prawdziwe. Nie widzę żadnych racji, dla których mielibyśmy mieć mniejsze zaufanie do tego rodzaju percepcji, to znaczy do intuicji matematycznej, niż do percepcji zmysłowej, która skłania nas do budowania teorii fizycznych i do oczekiwania, że przyszłe dane zmysłowe będą z nimi zgodne oraz do wiary w to, że pytania, które są teraz nierozstrzygalne, zostaną być może rozstrzygnięte w przyszłości" (Gödel, 1964, s. 120–121).

[4] Filozoficzny światopogląd Gödla miał wyraźne odbicie w decyzjach o charakterze metodologicznym, dotyczących tego, w jaki sposób (jakimi metodami) można uprawiać matematykę. Gödel deklarował, że przekonanie o istnieniu obiektywnego świata matematycznego stanowiło motywację do swobodnego posługiwania się metodami niekonstruktywnymi, opartymi o silne założenia o istnieniu obiektów pewnego typu.

[5] Dowody Gödla na istnienie Boga można uznać za próbę tego typu precyzacji. Wang mówi o rozmowie Gödla z Carnapem w dniu 13.09.1940 (1987, s. 217), której przedmiotem była metafizyka, w szczególności utworzenie spójnej doktryny metafizycznej, opartej na pojęciach Boga i duszy jako pierwotnych. O ile zdaniem Carnapa teoria taka miałaby raczej charakter mitologiczny, o tyle stanowisko Gödla jest zupełnie inne. Twierdzi on bowiem, że teoria taka mogłaby być nie mniej sensowna niż fizyka teoretyczna, której także nie da się wyrazić w terminach czysto obserwacyjnych.

[6] Dyskusji z „interpretacją syntaktyczną" poświęcona jest np. praca, w której Gödel pisze: „[N]iezależnie od tego, jak będą formułowane reguły syntaktyczne, moc i użyteczność powstającej w ten sposób matematyki jest proporcjonalna do

Niekiedy stanowisko Gödla przedstawia się jako wyraz pewnego rodzaju dogmatyzmu – poprzez pewnego typu „akt wiary" postulujemy istnienie uniwersum matematycznego, do którego odnoszą się zdania matematyki. Stanowisko takie przypominałoby „roboczą hipotezę" wielu matematyków – tych, którzy na odwiecznie pytanie o to, czy matematykę się odkrywa czy tworzy, odpowiadają, iż odkrywa (co jest spójne ze stanowiskiem realizmu, a nawet może być wręcz interpretowane jako jedno ze sformułowań stanowiska realistycznego). Byłby to wyraz pewnego typu naturalnej postawy ontologicznej matematyka – jednak bez głębszego uzasadnienia[7]. Jednak Gödel nie przyjął tego stanowiska oczywiście w sposób dogmatyczny czy bezrefleksyjny. Warto odnotować dość nietypowy – biorąc pod uwagę koncepcję Gödla – i chyba mało znany cytat: „[N]asze aksjomaty, jeśli mają być interpretowane jako zdania posiadające treść, w konieczny sposób zakładają rodzaj platonizmu, który nie może zadowolić żadnego krytycznego umysłu" (Gödel, 1933, s. 50)[8].

Tego typu sceptycznych wypowiedzi nie znajdziemy u Gödla zbyt wiele, jednak dokumentują one fakt, że Gödel miał świadomość tego, iż przyjęcie stanowiska realistycznego wymaga uzasadnienia (i oczywiście też doprecyzowania – gdyż realizm może przyjmować bardzo różne formy). Świadczyć to może o pewnej ewolucji poglądów Gödla. Bardzo wyraźnie pisze o tym:

---

mocy intuicji matematycznej koniecznej do udowodnienia dopuszczalności tych systemów. [...] jest jasne, że intuicja matematyczna nie może zostać zastąpiona przez konwencje, ale jedynie przez konwencje plus intuicję matematyczną" (Gödel, 1953/9, s. 358).

[7] „Gdy jednak uprawiam matematykę, mam subiektywne odczucie, że istnieje realny świat, który należy odkryć: świat matematyki. Ten świat jest dla mnie znacznie bardziej nieprzemijający, niezmienny i rzeczywisty niż fakty rzeczywistości fizycznej" (L. Bers, w: [Hammond, 1983, s. 31]). Hardy: „Osobiście zawsze uważałem matematyka w pierwszym rzędzie za obserwatora, człowieka, który obserwuje odległe pasmo górskie i odnotowuje swoje obserwacje. Jego zadaniem jest jasne wyodrębnienie i opisanie innym tak wielu szczytów, jak tylko jest to możliwe" (Hardy, 1929, s. 18). Cantor mówił o sobie jako o sprawozdawcy wyników swoich badań. Owych matematyków łączy więc przekonanie, iż świat bytów matematycznych istnieje obiektywnie – a my go jedynie odkrywamy. Oczywiście nie twierdzę, iż stanowisko to jest jedynym – a nawet, że jest stanowiskiem dominującym wśród matematyków, to jednak odrębna kwestia.

[8] W tym miejscu oraz w reszcie tekstu tłumaczenia moje, chyba że zaznaczono inaczej.

> Konieczne jest założenie pewnego korpusu bezwarunkowych prawd matematycznych, ponieważ, nawet jeśli matematykę traktować będziemy jako system hipotetyczno-dedukcyjny, nadal zdania stwierdzające, iż aksjomaty implikują pewne twierdzenia są bezwarunkowo prawdziwe.
>
> Obszar bezwarunkowych prawd matematycznych jest zakreślany w różny sposób przez różnych matematyków. Można wyróżnić co najmniej osiem stanowisk. [...]: (1) klasyczna matematyka w szerokim sensie (z włączeniem teorii mnogości), (2) klasyczna matematyka w węższym sensie, (3) semiintuicjonizm, (4) intuicjonizm, (5) konstruktywizm, (6) finityzm, (7) ograniczony finityzm, (8) implikacjonizm (Gödel, 1953/9, s. 346).

Strategia argumentacyjna Gödla polega na przyjęciu pewnej słabej wersji realizmu jako założenia wyjściowego – i następnie stopniowemu wzmacnianiu stanowiska przez wskazywanie stosownych argumentów. Teoria liczb jest naturalnym wyborem owego wyjściowego założenia, gdyż jest ona fundamentalna w matematyce – i powszechnie znana. Zdania teorii liczb wydają się wyrażać obiektywne treści[9]. Przyjęcie obiektywizmu w odniesieniu do zdań teorii liczb wydaje się być stosunkowo mało kontrowersyjne. Mówi o tym wyraźnie następujący cytat:

> Logika i matematyka – jak fizyka – opiera się na aksjomatach posiadających rzeczywistą treść [...]. To, że taka rzeczywista treść istnieje widoczne jest poprzez badanie teorii liczb. Stykamy się z faktami, które są niezależne od jakichkolwiek konwencji. Te fakty muszą posiadać treść, ponieważ niesprzeczność teorii liczb nie może być oparta na trywialnych faktach. [...] Jest słaba forma platonizmu, której nikt nie może zaprzeczyć. [...] Gdy porównamy hipotezę Goldbacha z hipotezą kontinuum, jesteśmy w większym stopniu przekonani, że pierwsza z nich musi być prawdziwa albo fałszywa (wypowiedź Gödla w: Wang, 1996, s. 211–212).

Opinia ta jest znamienna w kontekście I i II twierdzenia Gödla, zgodnie z którymi arytmetyka Peany (PA) nie jest zupełna i nie da się w niej udowodnić jej własnej niesprzeczności. Samo skonstruowane przez Gödla zdanie wyraża – mówiąc swobodnie – swoją własną niedowodliwość. Postrzegamy je jako prawdziwe, ale oczywiście wynika to już z analiz o charakterze semantycznym, wykraczających poza samą

---

[9] Stosunkowo naturalne wydaje się uznanie, iż prawdy teorii liczb mają „twardy" charakter, że nie są bynajmniej kwestią li tylko konwencji. Teza, że istnieje $n!$ permutacji zbioru n-elementowego wydaje się mieć charakter obiektywny – a nie być wynikiem jedynie czysto konwencjonalnej gry założeń.

formalną arytmetykę PA. Argumentacja taka jest – zdaniem Gödla – w pełni uprawniona (mimo iż nie jest ona formalizowana w PA). Źródłem wiedzy matematycznej jest bowiem analiza pojęć. Opiera się ona na swoistej zdolności poznawczej naszego umysłu, tj. intuicji matematycznej. To prowadzi nas do coraz silniejszych teorii, którym mamy prawo nadawać realistyczną interpretację.

2. Problem wyjaśniania w matematyce

Problem wyjaśnienia matematycznego można stawiać w (przynajmniej) dwóch obszarach: (i) wyjaśnień matematycznych w naukach przyrodniczych; (ii) wyjaśnień wewnątrz matematyki. Tu skupiam się wyłącznie na zagadnieniu (ii). Najbardziej chyba naturalną odsłoną tego zagadnienia jest pytanie o wyjaśniający charakter dowodów matematycznych: czy dowód matematyczny może (powinien?) pełnić rolę wyjaśniającą – i co to znaczy? Jest jasne, że podstawową funkcją dowodu jest niejako udokumentowanie (zgodnie ze standardami matematycznej argumentacji) prawdziwości jakiejś tezy. Zarazem naturalnym dla matematyka pytaniem (choć już nie ściśle formalnym) jest pytanie o głębsze przyczyny, o całe „tło zjawisk". Mówiąc swobodnie, przy analizie dowodu ważne jest nie tylko to, jak poszczególne kroki dowodowe następują po sobie, ale „o co tu naprawdę chodzi?". Używając nieco metaforycznego języka, chodzi tutaj o ową subtelną „grę pojęć matematycznych", która nie sprowadza się jedynie do tego, że kolejny krok dowodu wynika z poprzedniego. Rozumienie dowodu matematycznego jako formalnej weryfikacji faktów (przez badanie zależności formalnych) nie oddaje w pełni rozumienia dowodu matematycznego jako źródła wiedzy matematycznej. W takim duchu wypowiadają się nieraz matematycy:

> Nawet kiedy podano dowód, to – mimo iż może być ściśle logiczny i przekonujący […] może pozostać uczucie braku satysfakcji. Czytelnik może mieć poczucie, że czegoś brakuje. Argument może zostać przedstawiony w taki sposób, że nie rzuca światła na to, dlaczego, skąd bierze się procedura, jakie jest źródło dowodu i dlaczego prowadzi do sukcesu (Mordell, 1959, s. 11; cytowanie na podstawie: Mancosu, 2008, s. 142).

Podobnie Rota pisze (w kontekście dowodów komputerowych), iż „weryfikacja stanowi dowód, ale weryfikacja nie musi podawać racji" (Rota, 1997, s. 186–187)[10].

Pytanie o wyjaśniającą rolę dowodów matematycznych ma długą historię – już u Arystotelesa można znaleźć rozróżnienie odpowiadające, w dzisiejszej terminologii, na rozumowania, które jedynie uzasadniają pewną tezę, i rozumowania, które wyjaśniają przyczyny[11]. Sami matematycy mają oczywiście świadomość różnej natury i funkcji dowodów. Mancosu (2018) przytacza przykład monografii z zakresu geometrii algebraicznej, w której mowa jest o różnych metodach dowodzenia, i w której autor odrzuca tzw. metodę transferu (mimo jej efektywności), wskazując na fakt, że pozwala ona wprawdzie na logiczne udowodnienie określonego wyniku, ale go nie wyjaśnia[12]. Dyskusja na temat wyjaśnień w matematyce jest żywa – istnieje wiele szczegółowych analiz dotyczących poszczególnych twierdzeń, wskazuje się na związki problemu wyjaśniania z (dość nieuchwytnym, ale ważnym) pojęciem głębi w matematyce[13], kwestiami estetycznymi, czy problemem czystości dowodów (tj. stosowaniem metod ograniczonych do danej dziedziny – np. metod czysto geometrycznych w dowodach twierdzeń z geometrii czy kombinatorycznych w dowodach z zakresu kombinatoryki). Wciąż jednak brak dobrej, ogólnej odpowiedzi na pytanie o to, co nadaje dowodom matematycznym moc wyjaśniającą.

Pytanie o wyjaśnienie może też mieć szerszy charakter – i może dotyczyć nie tylko samych dowodów, ale wręcz szerszych klas zagadnień. Pytanie „co sprawia, że nie da się przeprowadzić kwadratury koła?" ma nieco szerszy wymiar: odpowiedź znajdziemy poza geometrią, w teorii Galois. Nie jest to więc już kwestia samego dowodu, ale też odpowiedniego interpretowania jednej teorii w drugiej. Podobnie można zadawać pytania o naturę podstawowych dla danej teorii pojęć, o naj-

---

[10] Nie ma tu miejsca na szczegółowe analizy zagadnienia. Za bardzo ciekawy uważam artykuł Rava (1999), w którym autor analizuje rolę dowodów w matematyce, akcentując ich centralne miejsce.

[11] Por. np. Mancosu (2018), gdzie Czytelnik znajdzie szczegółowy opis problemu wyjaśnień matematycznych (zarówno w fizyce, jak i wewnątrz samej matematyki) wraz z obszerną i aktualną bibliografią. Dziękuję jednemu z Recenzentów za zwrócenie uwagi na aktualną wersję tego hasła.

[12] Ta monografia to Brumfiel (1979). W innej pracy (Hafner, Mancosu, 2008) autorzy analizują ten przykład w kontekście teorii wyjaśnienia Kitchera.

[13] Por. numer specjalny *23*(2) *Philosophia Mathematica* (2015).

bardziej naturalne sformułowania etc. Jest to zagadnienie bardzo obszerne i nie będzie tu podjęte.

Jednak ten problem wyjaśnienia (czy może: szereg problemów) dotyczy wyjaśnień wewnątrz matematyki. Natomiast przedmiotem analiz w niniejszym artykule jest pytanie, które nie ma charakteru *par excellence* matematycznego – raczej filozoficzny lub metodologiczny. Ogólne pytanie o to, dlaczego każdy problem matematyczny jest rozwiązywalny, ma zupełnie inny charakter niż bardzo konkretne pytanie na przykład o to, dlaczego każda funkcja różniczkowalna jest ciągła, czy też dlaczego nie jest możliwa kwadratura koła lub trysekcja kąta. W tych bowiem przypadkach pytamy przede wszystkim o dowód, ewentualnie o jego analizę i komentarz (wyjaśnienie): z jakich „zasobów" korzystamy, jakie założenia są niezbędne (i jak ingerują w dowód), do jakiego zestawu pojęć się odwołujemy, jakie jest „pojęciowe środowisko". Ostatecznie więc często odpowiedź można sprowadzić do analizy pewnego konkretnego dowodu. Trudno natomiast oczekiwać podobnej analizy tezy o charakterze filozoficznym – zwłaszcza w kontekście faktu, że I twierdzenie Gödla zdaje się na pierwszy rzut oka owej tezie zaprzeczać.

Jednak w kontekście filozofii matematyki Gödla odwołanie się do pojęcia wyjaśnienia w tym kontekście uważam za uprawnione. Pojęcie rozwiązania problemu matematycznego wykracza w ujęciu Gödla poza podanie dowodu formalnego. Należy pamiętać o tym, że Gödel dostrzegał naturalne związki między zagadnieniami technicznymi i filozoficznymi[14]. Warto przypomnieć fakt, iż Gödel wierzył w to, że rozważaniom filozoficznym można będzie nadać klarowną postać i że (po wystarczająco dobrym wyjaśnieniu pojęć) dyskusja filozoficzna uzyska poziom ścisłości charakterystyczny dla matematyki (Gödel, 1951, s. 322). W takim optymistycznym duchu można interpretować jego stwierdzenie, że projekt stworzenia *characteristica universalis* Leibniza nie był czystą utopią (Gödel, 1944, s. 101). Zarazem przyznawał, że jest to kwestia przyszłości i że na razie filozofia nie osiągnęła wystarczającego stopnia rozwoju (Gödel, 1951, s. 311). Sam przyznawał, że nie nadał swoim analizom wystarczająco precyzyjnej postaci.

[14] Twórca teorii mnogości, Cantor, twierdził, iż nie da się oddzielić zagadnień matematycznych od filozoficznych – zaś teorii mnogości nadawał interpretację teologiczną (np. Murawski, 1984; Purkert, 1989).

O wyjaśnieniu mówimy w naturalny sposób w sytuacji, kiedy mamy do czynienia z pewnym zjawiskiem, które chcemy opisać, zrozumieć, czy właśnie wyjaśnić. Zazwyczaj (a na pewno często) zjawisko to jest niejako czymś zewnętrznym, nie jest np. kwestią konwencji – przykładem są zjawiska fizyczne, które są nam niejako dane, jesteśmy z nimi skonfrontowani. Czy jednak podobne ujęcie będzie właściwe w odniesieniu do matematyki, będącej – jak się wydaje – naszym tworem? W kontekście realistycznego stanowiska Gödla takie ujęcie jest jednak naturalne: matematyka jest niejako niezależna od nas, ma obiektywny charakter. Nie ma więc nic dziwnego w tym, iż jesteśmy konfrontowani z obiektywnymi faktami – także dotyczącymi matematyki. Fakty te chcemy wyjaśnić. A przykładem takiego faktu jest właśnie rozwiązywalność problemów.

Udzielenie odpowiedzi na pytanie: „Dlaczego każdy dobrze postawiony problem matematyczny jest rozwiązywalny?" wiąże się oczywiście z koniecznością doprecyzowania tego, jak rozumieć należy pojęcie rozwiązalności (rozwiązania) problemu matematycznego.

Zagadnienie to można niejako „unieważnić", sprowadzając je to definicyjnej tautologii: problem jest dobrze postawiony dokładnie wtedy, gdy jest rozwiązywalny (nawet jeśli owego rozwiązania nie znamy, ani nawet – potencjalnie – nigdy nie poznamy). I tu kończy się dyskusja. Uważam jednak, że nie byłoby to rzetelne postawienie sprawy. Pojęcia „dobrze postawionego problemu" i „rozwiązania problemu" nie są do siebie w prosty sposób redukowalne – historia matematyki pokazuje dobitnie, że byłoby to uproszczenie.

Pojęcie rozwiązania problemu matematycznego z punktu widzenia zwykłej, codziennej matematyki ma oczywiste znaczenie: „rozwiązać problem" to po prostu podać odpowiedni dowód, z użyciem standardowych środków. Zapewne 99,9% rozwiązań problemów, z jakimi styka się matematyk w praktyce, właśnie na tym polega. Sytuacja jednak komplikuje się, kiedy dotrzemy do zagadnień, które są nierozstrzygalne w ramach standardowej matematyki. Tu pojawia się pytanie, czym jest standardowa matematyka. Dość powszechny w filozofii i podstawach matematyki jest pogląd, zgodnie z którym standardowa matematyka daje się zrekonstruować w teorii mnogości ZFC (tj. Zermeli-Fraenkla z aksjomatem wyboru) – i to właśnie ZFC wyznacza niejako ramy „matematycznego standardu". Ten punkt widzenia jest bardzo wyraźnie widoczny u samego Gödla.

Wiadomo już od momentu udowodnienia I twierdzenia Gödla, że ZFC jest teorią niezupełną, zaś pierwszym przykładem zdania niezależnego o klarownej m a t e m a t y c z n e j treści jest hipoteza kontinuum[15]. Oczywiste jest więc, że pojęcie rozwiązania problemu matematycznego musi mieć inny sens, niż „rozstrzygnięcie go w ZFC" – w przeciwnym razie teza Gödla byłaby w oczywisty i jaskrawy sposób fałszywa.

Stanowisko Gödla warto rozpatrywać w kontekście programu Hilberta i matematycznego światopoglądu Hilberta. Hilbert był niewątpliwie optymistą poznawczym – twierdził bowiem, że w matematyce nie ma *ignorabimus* i że każdy dobrze postawiony problem matematyczny może zostać rozwiązany[16]. Program Hilberta można też uznać za wyraz owego optymizmu: Hilbert miał nadzieję, iż uda się znaleźć bezpieczne podstawy dla matematyki – która zarazem będzie na tyle silna, aby móc rozwiązywać dobrze postawione problemy. Narzędzi do tego ma dostarczyć teoria dowodu. Hilbert był zatem przekonany, że każdy problem matematyczny można rozwiązać w dosłownym sensie (najbliższym chyba potocznemu rozumieniu)[17].

---

[15] Twierdzenia Gödla informują o istnieniu zdań niezależnych, jednak konstrukcja tego zdania nie prowadzi do zdań o naturalnej treści matematycznej. CH jest takim zdaniem niezależnym od ZFC – i jest to bardzo ważny wynik. Warto dodać, że pierwsze zdania niezależne od PA o jasnej treści kombinatorycznej podano dopiero w latach 70. (Paris, Harrington, 1977).

[16] Francuski fizjolog, Emil du Bois-Reymond w 1872 sformułował tezę *ingorabimus*, zgodnie z którą nauka obarczona jest wewnętrznymi ograniczeniami, a więc istnieć muszą problemy niemożliwe do rozwiązania. Jego bratem był Paul du Bois-Reymond (wybitny matematyk), który tezę tę uważał za uzasadnioną także w stosunku do matematyki (McCarty, 2004). Nasuwa się tu uwaga Kanta o dręczących ludzki umysł pytaniach „których nie może uchylić, albowiem zadaje mu je własna jego natura, ale na które nie może odpowiedzieć, albowiem przewyższają one wszelką jego możność" (Kant, 1957, s. 7).

[17] Nieco upraszczając, można powiedzieć, że aż do przełomu XIX i XX wieku nie istniało pojęcie dowodu formalnego, a dowody matematyczne miały charakter – mówiąc swobodnie – semantyczny. Dopiero wraz z rozwojem logiki formalnej możliwe było w ogóle sformułowanie pojęcia „dowodu formalnego" jako swoistego zestawu operacji o formalnym charakterze (choć przekonania tego typu – w jeszcze niedoprecyzowanej formie – były już wcześniej obecne w matematyce). Niejako paradygmatycznym przykładem, który bardzo wyraźnie pokazuje rozbieżność między tradycyjnym (semantycznym) a formalnym pojęciem dowodu, jest geometria, której formalizację podał Hilbert w *Grundlagen der Geometrie*. Formalistyczny punkt widzenia na dowody geometryczne oczywiście zakłada, że istnieje jakiś ustalony system formalny, w ramach którego dowody te są rekonstruowane i że ów system obejmuje całość prawd (czy „prawd"). Nie ma miejsca na rozumowania

Często spotykanym stwierdzeniem w literaturze jest to, że twierdzenia Gödla zadały programowi Hilberta śmiertelny cios. Jest to stwierdzenie sugestywne, ale zapewne sam Gödel by się z nim nie zgodził, w każdym razie nie do końca. Już w niepublikowanych za życia notatkach zauważa, że interpretowanie matematyki finitystycznej jako systemu czysto formalnego prowadzi do pewnego dylematu (Gödel, 193?, s. 164). Możemy bowiem uznać:

(i) że n i e k a ż d y problem matematyczny jest rozwiązalny;
(ii) że syntaktyczne ujęcie dowodu nie stanowi właściwej reprezentacji naszego pojęcia dowodu jako czegoś, co jest źródłem naszej pewności i umożliwia rozwiązywanie problemów matematycznych.

Gödel wskazuje na fakt, że „zdania teorii liczb nierozstrzygalne w danym formalizmie są zawsze rozstrzygalne przez oczywiste wnioskowania niewyrażalne w danym formalizmie. Jeśli chodzi o te nowe wnioskowania, to okazują się one być równie oczywiste jak te, które dane są wewnątrz formalizmu. Nie jest więc raczej możliwe sformalizowanie rozumowań matematycznych nawet w dziedzinie teorii liczb, jednak przekonanie, o którym mówi Hilbert, pozostaje nienaruszone" (Gödel, 193?, s. 164), opowiadając się tym samym za drugą możliwością. Można powiedzieć, że jego zdaniem, interpretacja syntaktyczna prowadzi do zagubienia ważnych aspektów dowodu.

I właśnie dostrzeżenie tego faktu pozwala Godlowi pozostać poznawczym optymistą w odniesieniu do matematyki. Jednak w radykalnie inny sposób (niż Hilbert) interpretował pojęcie „rozwiązania problemu matematycznego". Zdaniem Gödla przekonujące rozumowanie matematyczne może mieć charakter nieformalny[18]. Przykładem jest zdanie skonstruowane w dowodzie I twierdzenia Gödla: nie ma bowiem wątpliwości, że zdanie „Ja jestem niedowodliwe w ramach PA"

---

intuicyjne – bardzo radykalnie przeciwko koncepcji intuicji wypowiadał się np. Hahn.

[18] Warto wspomnieć, że zdaniem Gödla możliwe będzie prowadzenie dyskusji filozoficznej z matematyczną ścisłością (warunkiem jest dobre wyjaśnienie pojęć; Gödel, 1951, s. 322). Wang przytacza opinię Gödla, zgodnie z którą w przyszłości sformułowana zostanie precyzyjna doktryna metafizyczna. Jej brak wynika z błędnego sposobu uprawiania filozofii (a także teologii) jak i panujących, scjentystycznych przesądów (Wang, 1987, s. 159).

postrzegamy jako prawdziwe, choć oczywiście nie jest ono dowodliwe w arytmetyce PA.

A zatem pojęcie „rozstrzygnięcia problemu matematycznego" będzie u Gödla interpretowane w zdecydowanie inny sposób, niż u Hilberta. Można powiedzieć, że w inny sposób interpretują oni termin „wiedza matematyczna" czy też, że w inny sposób odpowiadają na pytanie „co to znaczy – mieć wiedzę matematyczną?". Z punktu widzenia programu Hilberta uzyskanie wiedzy matematycznej jest możliwe dzięki ustanowieniu niebudzącego wątpliwości, finitystycznego fragmentu matematyki (a następnie dzięki przeprowadzeniu stosownych teoriodowodowych redukcji). Dla Gödla sprawa wygląda zupełnie inaczej – co ma oczywiście związek z twierdzeniami o niezupełności. Żadna teoria formalna (spełniająca odpowiednie, naturalne warunki) nie jest teorią zupełną, a więc nie będzie możliwe rozstrzygnięcie wszystkich problemów matematycznych w jednej teorii). Proces uzyskiwania wiedzy matematycznej wykracza poza procedury formalne, zaś matematyczna argumentacja nie sprowadza się do pojęcia „dowodu w teorii T". Dowody, które znamy z praktyki matematycznej, nie mają oczywiście charakteru formalnego: są to raczej przekonujące argumenty, w których w nieuchronny sposób pojawia się element o charakterze intuicyjnym, związanym z naszym rozumieniem pojęć matematycznych, a nie tylko formalnymi przekształceniami. Spektakularnym przykładem jest dowód twierdzenia Fermata – trudno sobie wyobrazić, jak wyglądałby w wersji w pełni sformalizowanej, jednak z pewnością nie byłby dla nas czytelny[19].

Pojęciem centralnym w filozofii matematyki Gödla jest intuicja matematyczna – swoista zdolność intelektualna do ujmowania prawd matematycznych, która wykracza poza mechaniczne operowanie na symbolach. Warto w tym kontekście wspomnieć o ważnej pracy Turinga (1939). Turing zwraca uwagę na fakt (w kontekście wyników Gödla), iż jesteśmy w stanie dostrzec prawdziwość zdań niedowodliwych w da-

[19] Ciekawy przykład dowodu, który jest krótki, zrozumiały i w pełni akceptowalny podaje Boolos (1987). Jest to dowód w logice drugiego rzędu – jednak formalizacja tego dowodu w logice pierwszego rzędu miałaby długość „kosmiczną". Problem formalizacji tego dowodu w Mizarze jest przedmiotem analiz w pracy Benzmüllera i Browna (2007). Dziękuję jednemu z Recenzentów za zwrócenie uwagi na to zagadnienie oraz sugestie bibliograficzne – a także za sugestie dotyczące prac Turinga.

nym formalizmie. W pracy analizuje problem całego systemu coraz silniejszych logik, w których możliwe będzie rozstrzyganie coraz szerszych klas problemów matematycznych – co również można rozumieć jako techniczny odpowiednik idei Gödla wykraczania poza dany system formalny[20]. Jakkolwiek byśmy nie rozumieli pojęcia intuicji matematycznej, nie budzi wątpliwości fakt, że nie może mieć ona charakteru mechanicznego – i tym samym nie może być „imitowana" w standardowym modelu maszyny Turinga. Można jednak twierdzić (np. Hodges, 2013), że pojęcie wyroczni, wprowadzone przez Turinga, stanowi formalny odpowiednik czynności poznawczych, wykraczających poza procedury mechaniczne. Turing nie analizuje bliżej natury owej wyroczni, ograniczając się do stwierdzenia, iż nie może być ona maszyną. Można więc powiedzieć, iż nieformalna, intuicyjna składowa działalności matematyka została tu „wbudowana" w techniczną definicję.

Pojawia się tu napięcie pomiędzy tym, co nazwalibyśmy „przekonującym matematycznie argumentem" a jego formalną parafrazą (czy może: *explicatum* w postaci pojęcia dowodu formalnego). Stanowisko szeroko rozumianego formalizmu redukuje pojęcie matematycznie poprawnego argumentu do pojęcia dowodu formalnego w stosownej teorii T. Jednak stanowisko Gödla jest zupełnie inne – z jego punktu widzenia dobrze postawione problemy matematyczne to nie są problemy, które są rozstrzygalne w ramach jakiejś konkretnej teorii T. Raczej – swobodnie mówiąc – dla każdego dobrze postawionego problemu matematycznego można sformułować stosowną teorię T, która go rozstrzygnie. I nie chodzi oczywiście o trywialne stwierdzenie, że jeśli mamy zdanie φ niezależne od teorii T, to teoria $T + \varphi$ (czyli T z dodanym φ jako założeniem), ów problem rozstrzygnie. Chodzi oczywiście o to, że możliwe jest poszukiwanie naturalnych, matematycznie uzasadnionych teorii T^*, stanowiących rozszerzenia T – i rozstrzygających nasze zdania (dotychczas) nierozstrzygalne.

Warto wspomnieć o dyskusji między Gödlem a Zermelo dotyczącej m.in. zagadnienia rozstrzygalności problemów matematycznych[21]. W liście do Gödla z dnia 21.09.1931 Zermelo przeciwstawia się tezie,

[20] W eseju Marciszewskiego (2018, w tym numerze) zagadnienie to jest omówione bardziej wyczerpująco.

[21] Dziękuję jednemu z Recenzentów za zwrócenie uwagi na to zagadnienie, a także za wskazanie pracy Ebbinghaus, Fraser, Kanamori (2010), w której (na stronach 482–501) zamieszczona jest przytaczana tu korespondencja.

iż każde pojęcie matematyczne może zostać zdefiniowane za pomocą skończonego ciągu symboli – nazywa to przekonanie „finitystycznym uprzedzeniem". Twierdzi wręcz, iż wyniki Gödla wyrażają fakt oczywisty: skoro można w języku formalnym zdefiniować jedynie przeliczalnie wiele zdań, zaś prawd jest nieprzeliczalnie wiele, to w oczywisty sposób muszą istnieć prawdy niedowodliwe. Można twierdzić, że Zermelo nie docenił znaczenia wyników Gödla i nie w pełni zrozumiał techniczne subtelności. Gödel odpowiada na list Zermelo (list z dnia 12.10.1931), wyjaśniając, na czym polega istota jego dowodu – i w szczególności podkreślając, iż chodzi o zdania w y r a ż a l n e w danym systemie, n i e r o z s t r z y g a l n e w tym systemie, a zarazem rozstrzygalne w systemie silniejszym. Zermelo interpretuje zastosowanie silniejszego systemu jako modyfikację samego pojęcia dowodu. Twierdzi, że dowodzenie polega na uczynieniu oczywistą stosownej tezy, co się odbywa poprzez sformułowanie odpowiedniego zestawu zdań. Zermelo stawia pytanie o to, czym jest owa oczywistość – i zarazem formułuje hipotezę, że w odpowiednim systemie każdy problem matematyczny jest rozstrzygalny (list do Gödla z dnia 29.10.1931). Korespondencja nie miała dalszego ciągu, jednak jest ciekawym świadectwem wczesnej recepcji wyników Gödla. Ciekawe jest również inne spojrzenie na kwestię rozstrzygalności problemów: Gödel, wiedząc o istnieniu metamatematycznych ograniczeń, wierzy w to, że możliwe będzie ustanawianie nowych aksjomatów, pozwalających na rozstrzyganie kolejnych problemów. Natomiast zdaniem Zermelo owe ograniczenia są oczywistym defektem systemów finitystycznych, zaś rozumowania matematyczne winny być odtwarzane w systemach o charakterze infinitarnym. Zgodnie z jego znanym stwierdzeniem, iż matematyka to logika nieskończonego[22].

3. Przykład hipotezy kontinuum

Gödel odróżniał matematykę obiektywną (jako zbiór prawd o matematycznym uniwersum) od subiektywnej (czyli tej, która jest nam znana). Jego realistyczne stanowisko zakładało, iż zadaniem matematyka jest poszukiwanie opisu rzeczywistości matematycznej – obiektywnej, istniejącej niezależnie od nas. Systemy formalne opisują ją tylko

[22] Bardzo ciekawy opis programu logiki infinitarnej Zermela Czytelnik znajdzie w pracy Pogonowskiego (2006).

częściowo – i oczywiście nie możemy poprzestać na jednym, ustalonym systemie jako finalnym zbiorze prawd. Raczej należy „drążyć" pojęcia matematyczne (w szczególności – pojęcie zbioru) tak, aby móc uzasadnić nowe aksjomaty – które pozwolą na rozstrzyganie kolejnych otwartych problemów. O ile jednak w wypadku samej arytmetyki faktycznie rozumowanie nieformalne przekonuje nas o prawdziwości np. zdania Gödla „ja nie mam dowodu", zaś praktyka matematyczna i nasze przekonania o sensowności arytmetyki prowadzą do zaakceptowania zdania Con(PA) – to trudno byłoby tego typu naturalną i oczywistą intuicyjną argumentację podać w wypadku zdań niezależnych od teorii mnogości.

Poszukiwanie wyjaśnienia rozwiązywalności każdego dobrze postawionego problemu matematycznego dobrze jest odnieść do konkretnego przykładu – i tę funkcję w niniejszym artykule będzie pełnić hipoteza kontinuum (CH), która jest niejako paradygmatycznym przykładem zdania niezależnego od ZFC[23]. ZFC nakłada niewiele ograniczeń: niesprzeczne z ZFC jest bardzo wiele zdań typu „Wartość kontinuum to $\aleph_\alpha$"[24]. Jednak mimo formalnej niezależności można postawić pytanie, czy istnieją jakieś przekonujące argumenty, które pozwoliłyby przypisać kontinuum jakąś konkretną wartość – i przede wszystkim, czy problem kontinuum jest dobrze postawionym problemem matematycznym.

W jednym ze swoich najbardziej znanych artykułów Gödel analizuje właśnie hipotezę kontinuum (Gödel, 1964). Uważa ją za obiektywne, dobrze postawione pytanie dotyczące matematycznej rzeczywi-

[23] Hipoteza kontinuum głosi, że moc zbioru liczb rzeczywistych (czyli moc kontinuum) jest najmniejszą nieprzeliczalną liczbą kardynalną, czyli $\aleph_1$. W innym sformułowaniu: każdy nieskończony podzbiór R jest przeliczalny lub równoliczny z R. Niezależność CH od ZFC została udowodniona przez Gödla i Cohena: Gödel wykazał jej niesprzeczność z aksjomatami ZFC, zaś Cohen w 1963 roku niesprzeczność jej negacji.

[24] Znane jest twierdzenie, które pokazuje, jak bardzo „dziwnie" może zachowywać się potęgowanie liczb kardynalnych. Easton wykazał, że dla dowolnej funkcji F, spełniającej dwa warunki: (1) F jest niemalejącą funkcją z klasy regularnych liczb kardynalnych w liczby kardynalne; (2) dla dowolnego κ: $\kappa < \mathrm{cf}\,(F(\kappa))$; można skonstruować model dla teorii mnogości, w którym dla dowolnej regularnej liczby kardynalnej κ zachodzi $2^\kappa = F(\kappa)$ (Easton, 1970). W szczególności kontinuum (czyli 2^ω) może być duże.

stości[25]. Jest ona oczywiście nierozstrzygalna w ZFC, ale to wynika po prostu ze słabości owej teorii. Czym innym jest bowiem matematyka obiektywna – ogół zdań prawdziwych bezwarunkowo – a czym innym subiektywna: ogół zdań dowodliwych w danej teorii formalnej (Gödel, 1951, s. 305). Sam skłaniał się raczej do tezy o fałszywości CH, wskazując paradoksalność pewnych konsekwencji CH (Gödel, 1964). Nie jest to jednak pogląd powszechnie akceptowany.

Gödel był więc przekonany o tym, że możliwe będzie znalezienie aksjomatów pozwalających na ustalenie wartości kontinuum. Jak wiadomo, aksjomat konstruowalności V = L implikuje CH (a także znacznie silniejszą od niej, uogólnioną hipotezę kontinuum). V = L ma poniekąd charakter minimalistyczny (uniwersum zbiorów jest „chude"). Gödel przypuszczał więc, że możliwe będzie wyprowadzenie CH z jakiegoś aksjomatu o charakterze przeciwnym do V = L, niejako maksymalistycznym (Gödel, 1964, s. 266). W pewnym dość dobrze określonym sensie, za aksjomaty o charakterze maksymalistycznym można uznać aksjomaty dużych liczb kardynalnych – i tu Gödel upatrywał rozwiązania. Zdawał sobie sprawę z tego, że potrzebne będą silne aksjomaty tego typu, i że nie będą tu wystarczające znajdujące się stosunkowo nisko w hierarchii nieskończoności liczby Mahlo[26].

Okazało się, że ta droga nie przyniesie sukcesu w zakresie CH: znane są wyniki, zgodnie z którymi różne silne aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych są niesprzeczne zarówno z hipotezą kontinuum, jak i z jej negacją (Levy, Solovay, 1967). Dodajmy tutaj, że Gödel sam próbował sformułować innego typu aksjomaty, które pozwoliłyby na rozwiązanie tego problemu (Gödel, 1970a, 1970b)[27].

---

[25] Argumenty na rzecz tezy, iż hipoteza kontinuum stanowi dobrze postawiony problem matematyczny, a nie tylko metamatematyczny, formułuje np. Hauser (2002).

[26] Artykuł Gödla (1964) nie jest jedynym (ani pierwszym) miejscem, gdzie wyrażał tego typu opinie. W wykładzie w Princeton w 1946 Gödel scharakteryzował „silne aksjomaty nieskończoności" jako założenie, które oprócz tego, że ma określoną strukturę formalną, to „w dodatku jest prawdziwe" (Gödel, 1946, s. 151). Wyraził też bardzo optymistyczne przypuszczenie, iż „może obowiązywać pewna forma twierdzenia o zupełności, która mówi, że każde zdanie wyrażalne w teorii mnogości jest rozstrzygalne na bazie dotychczasowych aksjomatów z dodatkowym założeniem dotyczącym wielkości uniwersum wszystkich zbiorów" (Gödel, 1946, s. 151).

[27] Zdaniem komentatorów w rozumowaniach Gödla tkwił błąd (por. Ellentuck, 1975; Solovay, 1995).

Niezależnie jednak od tego, że akurat badania w zakresie dużych liczb kardynalnych nie przyniosły rozstrzygnięcia problemu kontinuum, to sama idea poszukiwania nowych aksjomatów stała się inspiracją dla badaczy, często mówi się w tym kontekście o programie Gödla. Oczywiście – aksjomaty takie nie mogłyby mieć charakteru *ad hoc*, ale miałyby wynikać z analiz dotyczących naszego rozumienia pojęcia zbioru i naszej wizji uniwersum matematycznego. Dyskusja na ten temat jest żywa – jednak jej choćby pobieżne zreferowanie zdecydowanie wykracza poza ramy tego artykułu[28].

Jeśli więc chodzi o zdefiniowane wyżej *explicatum* („rozwiązywalność problemu matematycznego") to można pokusić się o charakterystykę jako znalezienie odpowiedniej teorii formalnej T – będącej rozszerzeniem ZFC – opartej na naturalnych, akceptowalnych aksjomatach, prowadzących do już formalnego rozstrzygnięcia problemu P w ramach T. Byłyby tu więc niejako dwie składowe:

- Faza koncepcyjno-analityczna: poszukiwanie odpowiednich naturalnych, akceptowalnych aksjomatów – i sformułowanie odpowiedniej teorii T.
- Faza techniczna: rozstrzygnięcie P w ramach T (czyli niejako standardowa praca matematyczna – być może bardzo trudna)[29].

Jakie jest filozoficzne tło dla przekonania, iż jest to zawsze możliwe i że każdy dobrze określony problem jest rozwiązywalny? Można tu wskazać dwa ważne aspekty. Jeden określiłbym hasłowo jako metafizyczny, drugi zaś jako metodologiczny. Mówiąc o aspekcie metafizycznym mam na myśli fakt, że realistyczne stanowisko Gödla zakłada istnienie obiektywnego, posiadającego pewną ustaloną naturę uniwersum matematycznego. Gödel uważał, iż uniwersum to ma charakter mnogościowy – i jest to jedno, obiektywne uniwersum, w którym in-

[28] Wymieńmy np.: Feferman, (1996, 2000), Friedman (2000), Maddy (1988a, 1988b, 1993, 1997), Steel (2000). Prace Woodina (1999, 2001) zawierają bardzo złożone technicznie analizy o charakterze metodologicznym, w oparciu o które można udowodnić, iż wartością continuum jest $\aleph_2$. Oczywiście są one przedmiotem dyskusji i kontrowersji, nie można więc bynajmniej twierdzić, iż oto problem kontinuum został rozwiązany.

[29] W odniesieniu do hipotezy kontinuum twierdził: „Kiedy pojęcie zbioru stanie się jasne, nawet gdy znajdziemy zadowalające aksjomaty nieskończoności, nadal pozostanie techniczny (tj. matematyczny) problem rozstrzygnięcia hipotezy kontinuum na podstawie aksjomatów" (Wang, 1996, s. 237).

terpretowane są wszystkie zdania matematyczne – i każde zdanie jest w nim prawdziwe bądź fałszywe. Nie ma zatem zdań o niezdeterminowanym statusie logicznym, zdań „chwiejnych”[30]. Teza Gödla miałaby zatem podbudowę metafizyczną w określonej wizji uniwersum matematycznego[31].

Oczywiście wiara w istnienie jednego, ustalonego (choć nieznanego) uniwersum matematycznego nie daje automatycznie żadnych wskazówek dotyczących tego, jakie są rozwiązania otwartych problemów matematycznych. Można byłoby przecież przyjąć tezę, iż świat matematyczny ma wprawdzie charakter obiektywny i ustalony, ale że jest niepoznawalny (czyli byłaby to teza *ignorabimus*, wbrew optymizmowi Hilberta czy Gödla). I tu dotykamy aspektu metodologicznego: tego, w jaki sposób możemy poszukiwać odpowiedzi na pytania matematyczne, które są *ex definitione* nierozstrzygalne w ramach dostępnej, tj. przyjętej, standardowej teorii (np. ZFC). Jest to możliwe przez ustanowienie nowych, wiarygodnych aksjomatów. Gödel był przekonany, że nasza analiza pojęcia zbioru pozwoli na ustanowienie takich aksjomatów. Jest to wyraz określonej wizji epistemologicznej: zdaniem Gödla mamy zdolność do analizy pojęć i dostrzegania owych prawd. Za obiecującą metodę uważał metodę fenomenologiczną, pisał o tym jawnie w jednej z prac (Gödel, 1961; por. również np. Tieszen, 1998)[32].

[30] Tak można byłoby uważać, gdyby przyjmować np. koncepcję tzw. multiwersów – tzn. koncepcję realistyczną, zgodnie z którą istnieje rzeczywistość matematyczna, ale nie jest to „jednolite” uniwersum matematyczne, ale raczej cała „galaktyka” uniwersów teoriomnogościowych, realizujących różne koncepcje zbioru (np. Hamkins, 2012). W takiej sytuacji nie miałoby sensu twierdzenie, że np. hipoteza kontinuum ma ustaloną wartość logiczną: w różnych uniwersach kontinuum mogłoby przyjmować różne wartości.

[31] Niniejszy artykuł nie ma charakteru historyczno-egzegetycznego, warto jednak zaznaczyć, że wydaje się, iż w rozważanej kwestii u Gödla nastąpiła pewna ewolucja poglądów. Pisze, że „jest wiarygodne, że [V = L] jest zdaniem absolutnie nierozstrzygalnym, na którym teoria mnogości rozgałęzia się (bifurcates) na dwa różne systemy, podobnie jak geometria euklidesowa i nieeuklidesowa” (Gödel, 1939b, s. 155). Dopuszcza więc jawnie istnienie problemów absolutnie nierozstrzygalnych; podobne tezy znajdziemy w innym tekście (Gödel, 193?). Niewątpliwie, później twierdził, iż V = L należy odrzucić.

[32] Warto tu wspomnieć o „drugim filarze” poznania prawd matematycznych – mogą być to argumenty o charakterze metodologicznym, które można symbolicznie oznaczyć etykietą „owocność”. Jest to bardzo obszerne zagadnienie, którego nie będę tu analizował. Warto pamiętać, iż sam Gödel bardzo wyraźnie podkreślał znaczenie tego aspektu, o czym świadczy chociażby następujący cytat:„[M]ożliwe

4. Podsumowanie

Pojęcie rozwiązania problemu matematycznego Gödel rozumie znacznie szerzej niż jako podanie matematycznego dowodu. Sformułowanie takiego dowodu jest oczywiście warunkiem koniecznym (i w wypadku ogromnej większości standardowych problemów matematycznych – wystarczającym), ale są też problemy matematyczne, dla których sformułowanie dowodu jest dopiero drugim etapem. Pierwszym jest znalezienie wiarygodnych (prawdziwych!) założeń, na podstawie których ów dowód można przeprowadzić. Założenia te oczywiście wykraczać muszą poza standard, jakim jest ZFC.

Jakie jest jednak wyjaśnienie owego fenomenu rozwiązalności problemów? Pierwsze założenie, na jakim opiera się tu Gödel, to metafizyczny realizm: istnieje uniwersum matematyczne, ma ono charakter obiektywny, niezależny od nas – i każde zdanie matematyczne ma ustaloną wartość logiczną. Drugie założenie, to pewnego rodzaju optymizm epistemologiczny: jesteśmy wyposażeni w wystarczająco dobre środki poznawcze, aby uzyskać wgląd w owo uniwersum.

Zastosowanie pojęcia wyjaśnienia, charakterystycznego przecież dla nauk empirycznych, jest zasadne: w obiektywistycznej wizji Gödla, mamy do czynienia z niezależnymi od nas faktami. Jednym z owych faktów jest właśnie rozwiązywalność wszystkich dobrze postawionych problemów matematycznych – i ten fakt domaga się wyjaśnienia.

---

jest rozstrzygnięcie, czy jest on prawdziwy [chodzi tutaj o nowe aksjomaty dla teorii mnogości – K.W.] także na innej drodze, a mianowicie indukcyjnie – poprzez badanie jego „sukcesów". Sukcesy znaczą tu owocność w sensie konsekwencji, w szczególności „weryfikowalnych" konsekwencji, to znaczy konsekwencji dających się uzyskać bez stosowania nowego aksjomatu, których dowody z pomocą nowych aksjomatów są jednakże zdecydowanie prostsze i łatwiejsze do odkrycia i umożliwiają połączenie wielu różnych dowodów w jeden. […] Mogą […] istnieć aksjomaty tak bogate w weryfikowalne konsekwencje, rzucające tyle światła na całą dziedzinę i dające tak silne metody rozwiązywania problemów (nawet rozwiązywania ich w sposób konstruktywny, o ile to tylko jest możliwe), że niezależnie od tego, czy są one wewnętrznie konieczne, czy nie, powinny zostać przyjęte w takim samym sensie, jak każda dobrze zbudowana (*well-established*) teoria fizyczna" (Gödel, 1964, s. 113–114).

BIBLIOGRAFIA

Brumfiel G. W. (1979). *Partially Ordered Rings and Semi-Algebraic Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press.

Easton W. B. (1970). Powers of Regular Cardinals. *Annals of Mathematical Logic*, *1*(2), 139–178.

Ebbinghaus H-D., Fraser C. G., Kanamori A. (2010). *Ernst Zermelo. Collected Works. Gesammelte Werke. Vol. I.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Ellentuck E. (1975). Gödel's Square Axioms for the Continuum. *Mathematische Annalen*, *216*(1), 29–33.

Feferman S. (2000). Why the Programs for New Axioms Need to Be Questioned, *The Bulletin of Symbolic Logic*, 6, 401–413.

Friedman H. (2000). Normal Mathematics Will Need New Axioms, *The Bulletin of Symbolic Logic*, *6*(4), 434–446.

Gödel K. (193?). Undecidable Diophantine Propositions. W: S. Feferman (red.), *Kurt Gödel: Collected Works: Volume III* (s. 164–175). Oxford: Oxford University Press.

Gödel K. (1933). The Present Situation in the Foundations of Mathematics. W: S. Feferman (red.), *Kurt Gödel: Collected Works: Volume III* (s. 45–53). Oxford: Oxford University Press.

Gödel K. (1939b). Vortrag Göttingen (Lecture at Göttingen). W: S. Feferman (red.), *Kurt Gödel: Collected Works: Volume III* (s. 127–155). Oxford: Oxford University Press.

Gödel K. (1944). Russell's Mathematical Logic. W: P. A. Schlipp (red.), *The philosophy of Bertrand Russell. Library of Living Philosophers, vol. 5* (s. 123–153). La Salle, Illinois: Open Court Publishing Company. Polskie tłumaczenie: Gödel, K. (2002). Logika matematyczna Russsella. W: R. Murawski (red.), *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów* (s. 77–102). Warszawa: PWN.

Gödel K. (1946). Remarks Before the Princeton Bicentennial Conference on Problems in Mathematics. W: S. Feferman (red.), *Kurt Gödel: Collected Works: Volume II* (s. 150–153). Oxford: Oxford University Press.

Gödel K. (1951). Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and Their Implications. W: S. Feferman (red.), *Kurt Gödel: Collected Works: Volume III* (s. 304–323). Oxford: Oxford University Press.

Gödel K. (1953/9). Is Mathematics Syntax of Language? W: S. Feferman (red.), *Kurt Gödel: Collected Works: Volume III* (s. 334–363). Oxford: Oxford University Press.

Gödel K. (1961). The Modern Development of the Foundations of Mathematics in the Light of Philosophy. W: S. Feferman (red.), *Kurt Gödel: Collected Works: Volume III* (s. 374–387). Oxford: Oxford University Press.

Gödel K. (1964). What is Cantor's Continuum Problem? W: P. Benacerraf, H. Putnam (red.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (s. 258–272). Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc. Polskie tłumaczenie: Gödel, K. (2002). Co to jest Cantora problem kontinuum. W: R. Murawski (red.), *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów* (s. 103–123). Warszawa: PWN.

Gödel K. (1970a). Some Considerations Leading to the Probable Conclusion, That the True Power of the Continuum Is $\aleph_2$. W: S. Feferman (red.), *Kurt Gödel: Collected Works: Volume III* (s. 420–421). Oxford: Oxford University Press.

Gödel K. (1970b). A Proof of Cantor's Continuum Hypothesis from a Highly Plausible Axiom About Orders of Growth. W: S. Feferman (red.), *Kurt Gödel: Collected Works: Volume III* (s. 422–423). Oxford: Oxford University Press.

Hafner J., Mancosu P. (2008). Beyond Unification, W: P. Mancosu (red.), *Philosophy of Mathematical Practice*, (s. 151–178). Oxford: Oxford University Press.

Hamkins J. D. (2012). The Set-Theoretic Multiverse. *Review of Symbolic Logic*, *5*(3), 416–449.

Hammond A. L. (1983). Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura. W: L. A. Steen (red.), *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów* (s. 26–48). Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.

Hardy G. H. (1929). Mathematical Proof. *Mind*, *38*(149), 1–25.

Hauser K. (2002). Is Cantor's Continuum Problem Inherently Vague? *Philosophia Mathematica*, *10*(3), 257–292.

Hodges W. (2013). Alan Turing. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, pobrane z: https://plato.stanford.edu/archives/win2013/entries/turing/

Kant I. (1957). *Krytyka czystego rozumu. Tom I.* Warszawa: PWN.

Krajewski S. (2003). *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne*. Warszawa: Wydawnictwo IFiS PAN.

Levy A., Solovay R. M. (1967). Measurable Cardinals and the Continuum Hypothesis. *Israel Journal of Mathematics*, *5*(4), 234–248.

Maddy P. (1988a). Believing the Axioms. I. *Journal of Symbolic Logic*, *53*(2), 481–511.

Maddy P. (1988b). Believing the Axioms. II. *Journal of Symbolic Logic*, *53*(3), 736–764.

Maddy P. (1993) Does V Equal L? *Journal of Symbolic Logic*, *58*(1), 15–41.

Maddy P. (2000). Does Mathematics Need New Axioms? *The Bulletin of Symbolic Logic*, *6*(4), 413–422.

Mancosu P. (2008). Mathematical Explanation: Why It Matters. W: Mancosu P. (red.), *Philosophy of Mathematical Practice* (s. 134–150). Oxford: Oxford University Press.

Mancosu P. (2018). Explanation in Mathematics. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, pobrane z: https://plato.stanford.edu/archives/sum2018/entries/mathematics-explanation/

Marciszewski W. (2018). Does Science Progress towards Ever Higher Solvability through Feedbacks between Insights and Routines? *Studia Semiotyczne*, *32*(2), 153–185.

McCarty D. C. (2004). David Hilbert and Paul du Bois-Reymond: Limits and Ideals. W: Link G. (red.), *One Hundred Years of Russell's Paradox* (s. 517–532). Berlin, New York: Walter de Gruyter.

Mordell L. (1959). *Reflections of a Mathematician*. Montreal: Canadian Mathematical Congress.

Murawski R. (1984). G. Cantora filozofia teorii mnogości. *Studia Filozoficzne*, *11–12*(8–9), 75–88.

Paris J., Harrington L. (1977). A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic. W: J. Barwise (red.), *Handbook of Mathematical Logic* (s. 1133–1142), Amsterdam: North-Holland.

Pogonowski J. (2006). Projekt logiki infinitarnej Ernsta Zermela. *Investigationes Linguisticae*, XIV, 18–49.

Purkert W. (1989). Cantor's Views on the Foundations of Mathematics. W: D. E. Rowe, J. McCleary (red.), *The history of modern mathematics. Vol.1* (s. 49–65). San Diego: Academic Press.

Rav Y. (1999). Why Do We Prove Theorems? *Philosophia Mathematica*, *7*(3), 5–41.

Rota G.-C. (1997). The Phenomenology of Mathematical Proof. *Synthese*, *111*(2), 183–196.

Solovay R. M. (1995). Introductory Note to *1970a, *1970b, *1970c. W: S. Feferman (red.), *Kurt Gödel: Collected Works: Volume III* (s. 405–420). Oxford: Oxford University Press.

Steel J. R. (2000). Mathematics Needs New Axioms. *The Bulletin of Symbolic Logic*, *6*(4), 422–433.

Tieszen R. (1998). Gödel's Path from the Incompleteness Theorems (1931) to Phenomenology (1961). *The Bulletin of Symbolic Logic*, *4*(2), 181–203.

Wang H. (1987). *Reflections on Kurt Gödel*, Cambridge: MIT Press.

Wang H. (1996). *A logical journey. From Gödel to Philosophy*. Cambridge: MIT Press.

Woodin W. H. (1999). The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms and the Nonstationary Ideal. Berlin, New York: de Gruyter.

Woodin W. H. (2001). The Continuum Hypothesis. Parts I and II. *Notices of the AMS*, *48*(6–7), 567–576, 681–690.

Wójtowicz K. (2002). *Platonizm matematyczny. Studium filozofii matematyki Kurta Gödla*, Tarnów: Biblos.

THE NOTION OF EXPLANATION IN GÖDEL'S PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

SUMMARY: The article deals with the question of in which sense the notion of explanation (which is rather characteristic of empirical sciences) can be applied to Kurt Gödel's philosophy of mathematics. Gödel, as a mathematical realist, claims that in mathematics we are dealing with facts that have an objective character (in particular, they are independent of our activities). One of these facts is the solvability of all well-formulated mathematical problems – and this fact requires a clarification. The assumptions on which Gödel's position is based are: (1) metaphysical realism: there is a mathematical universe, it is objective and independent of us; (2) epistemological optimism: we are equipped with sufficient cognitive power to gain insight into the universe Gödel's concept of a solution to a mathematical problem is much broader than of a mathematical proof – it is rather about finding reliable axioms that lead to a (formal) solution of the problem. I analyze the problem presented in the article, taking as an example of the continuum hypothesis.

KEY WORDS: mathematical realism, mathematical explanation, incompleteness theorems, mathematical universe, continuum hypothesis.