

MARIA SPYCHALSKA

O NIEOSTROŚCI RAZ JESZCZE *

1. PARADOKS WSKRZESZONY - WPROWADZENIE

Uważa się, że jest coś paradoksalnego w nieostrości pewnych terminów należących do języka naturalnego, takich jak „młody”, „bogaty”, „łysy”, etc. Znany od starożytności tzw. „paradoks łysego” dręczy do dziś filozofów języka. Paradoks ten ma powstawać w sposób następujący. Stwierdzamy oto, że człowiek posiadający dziesięć tysięcy włosów na głowie łysy nie jest. Następnie wrywamy mu jeden włos i uważamy, że ta drobna zmiana nie zmieniła w sposób istotny stanu jego owłosienia. Wszak – zakładamy – każdy rozsądny człowiek zgodzi się z twierdzeniem, że odjęcie jednego włosa niełysemu człowiekowi nie sprawi, że ów łysym się stanie. Postępując tak dziesięć tysięcy razy pozbawiamy nasz biedny obiekt badawczy wszystkich włosów i dziwimy się, czemu jego głowa stała się nagle jako ten cesarz naga, ujawniając nam absurd naszego rozumowania. Skoro mamy dwie prawdziwe przesłanki, które na mocy poprawnego indukcyjnego rozumowania prowadzą do fałszywego wniosku, to – wydaje się – jest tutaj pewien niezaprzeczalny paradoks, a przynajmniej pojęciowy nieład, domagający się uporządkowania.

Problem w tym, że nieład ten bynajmniej nie powstaje przypadkowo, lecz bierze się z pewnej cechy naturalnojęzykowych terminów. Nieostrość jest nieodłączną własnością przysługującą niektórym (a nawet bardzo wielu) predykatom występującym w językach naturalnych i nieposiadającym przez to – co jest tezą tego artykułu – dobrej interpretacji w logice klasycznej. Jako nie binarne predykaty te wymagają takiej logiki, w której zyskają dobre – oddające nasze intuicje językowe – definicje, a wnioskowania z ich

* Za cenne spostrzeżenia i sugestie dziękuję Erykowi Kopczyńskiemu i Tadeuszowi Ciecierskiemu. Za dodatkowe uwagi dziękuję też Justynie Grudzińskiej, Jakubowi Szymanikowi, Piotrowi Wilkinowi, Konradowi Zdanowskiemu oraz anonimowym recenzentom.

użyciem przestaną być źródłem paradoksów, w rodzaju „paradoksu łysego”, który odtąd będziemy nazywać zamiennie po prostu „paradoksem nieostrości”. Mamy tu na myśli logikę wielowartościową. Zanim jednak pokażemy, w jaki sposób pomoże nam ona uporać się z problemem, omówimy w zarysie, dlaczego logika klasyczna jest dla naszych potrzeb nieodpowiednia, oraz przedstawimy pewne standardowe i pozostające w zgodzie z logiką klasyczną rozwiązania paradoksu nieostrości, jednocześnie uzasadniając, czemu są niezadowolające. Następnie zdefiniujemy semantykę wielowartościową dla predykatów nieostrych oraz wyjaśnimy, dlaczego takie rozwiązanie jest bardziej adekwatne i eleganckie od wcześniejszych. Na koniec spróbujemy wyciągnąć filozoficzne wnioski, jakie – w naszym odczuciu – taka analiza problemu nieostrości może implikować, przy pewnych dodatkowych założeniach dotyczących procesu ustalania znaczeń terminów w języku.

2. NIEOSTROŚĆ I PRAWO WYŁĄCZONEGO ŚRODKA

Skoro mamy mówić o nieostrości, to warto naprzód tę nieostrość zdefiniować. W tym celu trzeba wprowadzić pojęcia „ekstensji pozytywnej” i „ekstensji negatywnej”.

Definicja 1.

Przez «ekstensję pozytywną terminu t » rozumiemy zbiór tych przedmiotów z danego uniwersum¹, o których można termin t prawdziwie orzekać. (Zastępczo można używać po prostu pojęcia «ekstensja»).

«Ekstensją negatywną terminu t » nazwiemy konsekwentnie zbiór tych przedmiotów z uniwersum, o których nie można prawdziwie orzekać t .

Przykład

Rozważmy termin «stół». Ekstensją pozytywną terminu «stół» jest zbiór wszystkich tych przedmiotów, które możemy prawdziwie nazywać «stołami» (zbiór stołów), ekstensją negatywną zaś wszystko to, co nie jest stołem (czyli zbiór nie-stołów).

Na gruncie logiki klasycznej, na mocy prawa wyłączonego środka, wydałoby się zatem prawdziwe następujące stwierdzenie:

Dla dowolnego x , dowolnego terminu t : x należy do ekstensji pozytywnej t lub x należy do ekstensji negatywnej t .

Oczywiście gdyby było tak, jak optymistycznie zakłada powyższe stwierdzenie, to nie mielibyśmy do czynienia z żadnymi paradoksami nieostrości. Rzecz w tym, że takie twierdzenie działałoby jedynie przy założeniu, że t jest terminem ostrym – z ekstensją określoną w binarny sposób.

¹ W wypadku języka potocznego modelem może być po prostu świat, a uniwersum – ogół przedmiotów w świecie.

Definicja 2.

t jest terminem ostrym wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego x (elementu uniwersum modelu), x należy do ekstensji pozytywnej t lub x należy do ekstensji negatywnej t .

Terminy nieostre są to więc konsekwentnie takie terminy, które nie są ostre, a zatem – oprócz ekstensji pozytywnej i negatywnej posiadają tzw. „zakres nieostrości”, czyli pewien niepusty zbiór takich przedmiotów², które nie należą ani do ekstensji pozytywnej tego terminu, ani do jego ekstensji negatywnej.

Definicja 3.

t jest terminem nieostrym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją x (elementy uniwersum), takie, że x nie należą ani do ekstensji pozytywnej, ani do ekstensji negatywnej t .

Istnienie nieostrzych terminów (predykatów) w językach naturalnych stoi więc, jak się wydaje, w jawnej sprzeczności z prawem wyłączonego środka. W pewnym sensie tak jest, jednak wyłącznie dlatego, że nieostre predykaty w ogóle nie mają adekwatnej interpretacji w logice klasycznej. Przy założeniu – wcale nie tak bardzo wątpliwym – że większość czy nawet prawie wszystkie predykaty naturalnojęzykowe są nieostre, może się okazać, że logika klasyczna w ogóle nie nadaje się do opisu języków naturalnych³.

W logice klasycznej interpretacjami predykatów w modelu są pewne podzbiory uniwersum. (A dokładniej: dla m -argumentowego predykatu P jego interpretacją w modelu jest pewien $S \subseteq |M|^m$). Predykaty interpretuje się więc jako zbiory (n -tki elementów z uniwersum modelu). Mają one zatem ściśle określoną ekstensję - określoną w sposób binarny. Dopełnienie zbioru będącego interpretacją predykatu jest zbiorem tych wszystkich elementów, które nie spełniają tego predykatu. Jest to najbardziej naturalny opis oddający binarność logiki klasycznej, która to własność wyraża się w prawie wyłączonego środka. Predykaty nieostre nie interpretują się jednak w taki sposób. Dlatego formalnologiczne rozumowania, przeprowadzane w ramach logiki klasycznej przy użyciu tych predykatów, muszą produkować paradoksy – takie właśnie jak ten związany z indukcją.

² Zbiór ten musi być aktualnie, a nie tylko potencjalnie niepusty. Zastanówmy się, czy termin „łysy” pozostałby nieostry, gdyby wskutek na przykład ewolucji (albo katalizmu ekologicznego) wszyscy ludzie na świecie stracili włosy. Na początek pewnie tak, ponieważ znaczenie tego terminu ukształtowało się wskutek istnienia w świecie osób o różnej gęstości czupryny (zakładamy tu, że znaczeń tych terminów uczymy się ostensywnie), wraz jednak z upływem czasu termin ten nie tylko mógłby stracić swoje pierwotne nieostre znaczenie (zakres nieostrości stałby się nagle zbiorem pustym), ale też w ogóle zaniknąć jako bezużyteczny.

³ Oczywiście w języku występują również predykaty typu „ma 180 cm wzrostu”, ale są to w pewnym sensie predykaty sztuczne. Po pierwsze, odwołują się często do pojęć teoretycznych (tu: centymetr), które z rzadka pojawiają się w potocznej komunikacji; po drugie, wykorzystują dane wykraczające poza te zdobyte przez prostą obserwację. W efekcie można powiedzieć, że terminu „wysoki” uczymy się przez prostą ostensję, a terminu „posiadający 180 cm” już nie.

Kiedy pytamy o to, czy jakieś rozumowanie jest poprawne czy nie jest, powinniśmy najprzód ustalić, jak wygląda nasz język i w jakim poruszamy się świecie – jaki mamy model. W przypadku „paradoksu łysego” niejako *implicite* zakładamy, że naszą logiką jest logika klasyczna, a jednocześnie chcielibyśmy zachować intuicyjne znaczenie nieostrego predykatu, którym się posługujemy. Tymczasem nieostre predykaty nie dają się ADEKWATNIE interpretować (jako predykaty) w ramach logiki klasycznej. Stąd dochodzi do bałaganu pojęciowego i błędu, którego efektem jest właśnie analizowany paradoks.

3. KLASYCZNE PRÓBY ROZWIĄZANIA PARADOKSU

Przyjrzyjmy się dokładnie temu, jak wygląda nasze indukcyjne rozumowanie. Niech $\varphi(n)$ - formuła wyrażająca własność, że dla dowolnego x , jeśli x posiada n włosów, to x jest łysy.

(P)

(0) $\varphi(0)$

(i) $\forall n(\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n + 1))$

Wniosek:

$\forall n(\varphi(n))$

Nie wymaga – jak sądzimy – wyjaśnienia, że zastosowany tutaj schemat indukcji jest formalnie poprawny. W jaki sposób zatem dochodzi do tego, że z prawdziwych – jak się wydaje – przesłanek za pomocą formalnie poprawnego rozumowania dochodzimy do jawnie fałszywego wniosku? Odpowiedź jest prosta – dzieje się tak dlatego, że zastosowany predykat jest w jakiś sposób wadliwy na gruncie logiki klasycznej. Tym więc, czego potrzebujemy, jest zdefiniowanie dla niego nieklasycznej, wielowartościowej semantyki. Nie jest to oczywiście pomysł w filozofii nowy. W celu uporania się z nieostrością wykorzystywano, jak dotąd, logiki zarówno trójwartościowe (por. [4], [9], [14]), jak i preferowane w tym artykule – takie, w których mamy nieskończenie wiele wartości logicznych (por. [6], [17]). Ciągłe jednak wydaje się to pomysł niedoceniany. Powszechne jest wciąż mniemanie, że z jakichś tajemniczych powodów logikę klasyczną trzeba zachować, ocalić. Owo konserwatywne przywiązanie do klasycznej, dwuwartościowej logiki ma jednak podobne podstawy i niestety chyba równie świetlaną przyszłość, co przywiązanie do fizyki newtonowskiej. Skoro klasyczna logika zawodzi jako baza do opisu języka potocznego, to należy ją odrzucić i spróbować poszukać takiej, która spełni to zadanie lepiej. Najbardziej tradycyjne rozwiązania paradoksu nieostrości ignorują jednak powyższy fakt. Najczęściej dąży się do rozwiązania paradoksu przy zachowaniu klasycznej logiki i mamy tutaj do czynienia z dwiema zasadniczymi strategiami.

(1). PODWAŻENIE MATERIALNEJ PRAWDZIWOŚCI PRZEŚŁANKI DRUGIEJ.

Twierdzi się, że druga przesłanka rozumowania (P) jest zwyczajnie fałszywa, czyli że $\exists n(\varphi(n) \wedge \neg \varphi(n+1))$. Tym samym zakłada się *implicite*, że użyty termin „łysy” ma taki sam charakter jak termin ostry – że jest binarny. Takie stwierdzenie może mieć trojaki podłoże:

(a) Po pierwsze, można zakładać, że istnieją dla nieostrych terminów (i zapewne dla innych terminów naturalnojęzykowych także) tzw. „definicje realne”, które wyrażają prawdę o świecie – niezależną od języka. Wówczas powie się, że są na świecie ludzie łysi i niełysi, a te dwa zbiory oddziela od siebie różnica dokładnie jednego włosa. Mało precyzyjny zaś sposób używania terminu „łysy” przez użytkowników języka wynika wyłącznie z ich ograniczeń epistemicznych. Jeśli więc, dajmy na to, łysi są ci wszyscy ludzie, którzy mają mniej niż n włosów (dla pewnego, określonego n), to orzekanie łysości o kimś, kto ma $n+1$ włosów, stanowi zwyczajnie pomyłkę – w dodatku nie językową, lecz faktyczną. Problem z takim rozwiązaniem polega jednak nie tylko na tym, że nie chcemy się zgodzić na istnienie definicji realnych w ogólności, ale i na tym, że w wypadku rozważanych terminów nieostrych byłoby to nieintuicyjne. Twierdzenie, że w pewnym sensie z natury świata wynika, brak ilu włosów na głowie decyduje o tym, że można być prawdziwie nazwanym „łysym”, jest mało rozsądne, choć absurd tego twierdzenia widać może bardziej, gdy użyjemy takich predykatów, jak „biedny” czy „bogaty”, których kontekstowość jest wyraźniejsza.

(b) Można by też powiedzieć, że termin „łysy” jest ostry, to znaczy ma określoną ekstensję (powiedzmy taką, że „łysy człowiek” znaczy „człowiek posiadający mniej niż n włosów”, dla pewnego, określonego n), ponieważ na gruncie języka ten termin tak właśnie a nie inaczej funkcjonuje. Wówczas postulujemy pewną definicję sprawozdawczą dla tego terminu. Takie postawienie sprawy jest jednak znów niezgodne z naszymi intuicjami dotyczącymi tego terminu – że funkcjonuje on w języku w sposób nieostry. Przyjęcie, że terminy nieostre mają pewne sprawozdawcze definicje określające ostro ich ekstensję, nie tylko byłoby w pewnym sensie samo w sobie paradoksalne, ale też stanowiłoby próbę usunięcia paradoksu nieostrości przez zaprzeczanie istnienia nieostrości jako takiej.

Warto zauważyć, że zarówno (a) jak i (b) są pewnymi wersjami tzw. „koncepcji epistemicznej” (por. [15], [16], [13]), zgodnie z którą nieostrość jest zjawiskiem nie tyle semantycznym, ile właśnie epistemicznym. Z semantycznego punktu widzenia terminy z pozoru nieostre mają bowiem jak najbardziej ostro wyznaczone ekstensje, tyle że ich granice są dla nas niejako „z natury” niepoznawalne. Paradoks zatem jest generowany na poziomie epistemicznym, a nie semantycznym.

(c) Wreszcie, można stwierdzić, że – owszem – pewne terminy, takie jak: „łysy”, „biedny” etc., są nieostre i generują pewne paradoksy, ale my przecież

możemy się z tym uporać, zaostrzając je, tzn. podając regulujące dla nich definicje. Wyznaczamy wtedy w sposób arbitralny granicę ekstensji pozytywnej oraz utożsamiamy jej dopełnienie z ekstensją negatywną. Definiując jednak regulująco predykat pierwotnie nieostry, zmieniamy to jego znaczenie, które już w języku funkcjonuje. Terminy, których znaczenie chcemy w ten sposób regulować, nie są terminami nowymi na gruncie danego języka. Skoro w języku występują, to posiadają pewną semantykę. Definicja regulująca, która zaostrza pierwotnie nieostry termin, zmienia w istotny⁴ sposób jego znaczenie. W efekcie mamy więc do czynienia już nie z nieostrym terminem „biedny”, ale z innym terminem – powiedzmy „biedny_n” („biedny_n” to taki, który ma mniej niż n złotych). Nie trzeba chyba podkreślać, że jest to rozwiązanie podobne do wyleczenia z choroby przez zamordowanie pacjenta. Za pomocą definicji regulującej nie usuwamy w ogóle paradoksu. Nie można mówić, że się rozwiązało paradoks nieostrości w ten sposób, iż dokonano się przekształcenia terminu nieostrego w ostry i stwierdziło, że w wypadku terminu ostrego żaden paradoks nie powstaje.

(2). STOPNIOWALNOŚĆ A MNOŻENIE PREDYKATÓW NAD POTRZEBĘ.

Inną drogą byłaby próba postulowania, że rozumowania typu P mają charakter ekwiwokacyjny. Ci, którzy proponują to rozwiązanie, zwracają uwagę na fakt, że własności wyrażane przez predykaty nieostre są w jakiś sposób stopniowalne. Twierdzi się zatem, że po każdym kroku indukcyjnym, z użyciem nieostrego predykatu, zmienia się stopień własności przez ten predykat wyrażanej. Tym samym mówi się, że naprawdę mamy do czynienia nie z jednym nieostrym predykatem, lecz z wieloma różnymi predykatami wyrażającymi różne własności. Przykładowo: kiedy się mówi, że łysy jest człowiek posiadający n włosów, to użyty tu zostaje termin „łysy_n”, który można rozumieć jako „łysy w stopniu n ”. Dla $n + 1$ będziemy mieli „łysy w stopniu $n + 1$ ”, a dla 0 – „łysy w stopniu 0 ”. Przy takim założeniu rozumowanie P stanie się oczywiście jawnie ekwiwokacyjne. O ile jednak spostrzeżenie dotyczące stopniowalności tych predykatów jest słuszne, o tyle wprowadzanie dla każdego n całkiem innego predykatu ma tę wadę, że niepotrzebnie zwiększa nam kardynalność języka. W miejsce każdego nieostrego terminu naturalnojęzykowego wprowadzamy bowiem przeliczalnie wiele nowych

⁴ Może pojawić się wątpliwość, czy definicja regulująca zmienia znaczenie, czy je dopiero ustala. Oczywiście, jeśli się założy, że w wypadku terminów nieostrzych odniesienie nie jest w ogóle ustalone, to trudno mówić o jego zmienianiu. Niemniej jednak wydaje się, że powyższe założenie byłoby niesłuszne. Terminy nieostre, podobnie jak wszystkie inne terminy w języku, mają ustaloną semantykę. Inaczej nie moglibyśmy się za ich pomocą komunikować. Tyle że owa semantyka jest rozmyta, co stanowi pewną jej szczególną własność, ale niekoniecznie – jak się powszechnie uważa – defekt!

predykatów. (Nie mówiąc o tym, że będzie to generować problemy w rodzaju: jak odróżnić człowieka łysego $_n$ od owłosionego $_n$, czy też biednego $_n$ od bogatego $_n$? Klasyczne pytanie o to, czy szklanka jest do połowy pełna, czy do połowy pusta).

4. SEMANTYKA NADWARTOŚCIOWA

Wypada także wspomnieć rozwiązanie odwołujące się do tzw. SEMANTYKI NADWARTOŚCIOWANIA (SUPERWALUACJI) (por. [1], [2], [8]). Jest to podejście *de facto* nieklasyczne, choć starające się w możliwie najmniejszym stopniu okaleczyć logikę klasyczną. W rezultacie mamy logikę nie dwuwartościową, ale zachowującą klasyczną relację konsekwencji. Główna idea tej koncepcji polega na przyznaniu, że pewne zdania, a konkretnie zdania z terminami nieostryimi odnoszące się do przypadków brzegowych, nie mają wartości logicznej. Na przykład zdanie „Einstein jest łyse” będzie, według superwaluacjonisty, pozbawione wartości logicznej. Aby zachować jednak twierdzenia standardowej logiki, superwaluacjonista przyznaje wartość logiczną tego typu zdaniom pod warunkiem, że będą one prawdziwe niezależnie od tego, w jaki sposób zaostrzymy nieostry termin. Zdanie „Einstein jest łyse lub nie” jest prawdziwe niezależnie od tego, jaką ekstensję miałyby termin „łyse”. Prawda jest teraz definiowana jako to, co jest prawdziwe niezależnie od tego, jak rozwiązana zostanie semantyka takich „wybrakowanych” terminów nieostrych. (Stąd nazywana jest „superprawdą”).

Jak jednak każda próba zjedzenia ciasteczka i zachowania go, również ta okazuje się obarczona pewnymi nieusuwalnymi wadami. Nie wdając się w szczegółowe i bardziej techniczne problemy, jak choćby to, że teoria „superprawdy” nie posiada własności, których oczekuje się od każdej standardowej teorii prawdy, zwrócimy uwagę na najbardziej uderzający i filozoficzny kłopot, w jaki się wikała superwaluacjonista – mianowicie na pytanie o ontologiczną rolę, jaką według tej koncepcji ma spełnić kwantyfikator egzystencjalny. Skoro superwaluacjonista odrzuca drugą przesłankę paradoksu nieostrości (a musi to uczynić, jeśli zakłada, że zdania o przypadkach brzegowych nie mają wartości logicznej), to tym samym uznaje tę przesłankę za fałszywą, a zatem uznaje za prawdziwe zdanie egzystencjalne (por. [5], [12])! Postuluje więc, że istnieje takie n , że coś, co ma n włosów, jest łyse, ale coś, co ma $n + 1$ włosów, już łyse nie jest. Rzecz w tym, że w ten sposób wróciliśmy do koncepcji epistemicznej, a nie taki był cel superwaluacjonisty, który zaprzeczy, jakoby postulował coś podobnego. Będzie twierdził, że tym, co postuluje, jest, że PRAWDA JEST, ŻE ISTNIEJE TAKIE N , ŻE COŚ, CO MA N WŁOSÓW, JEST ŁYSE, ALE COŚ, CO MA $N + 1$ WŁOSÓW, JUŻ ŁYSE NIE JEST, nie postuluje natomiast, jakoby ISTNIAŁO TAKIE N , ŻE JEST PRAWDA, ŻE

COŚ, CO MA N WŁOSÓW, JEST ŁYSE, ALE COŚ, CO MA $N + 1$ WŁOSÓW, JUŻ ŁYSE NIE JEST. Innymi słowy – chociaż jest prawdą, że istnieje granica, to nie ma żadnego konkretnego punktu, o którym byłoby prawdą, że stanowi ową granicę. Ponieważ nie jesteśmy jeszcze gotowi zgodzić się, że pewne zdania egzystencjalne mogą być prawdziwe, chociaż nie ma żadnych prawdziwych przykładów je spełniających, nie podejmujemy się dalej zagłębiać się w metafizykę powyższych rozumowań.

5. LOGIKA WIELOWARTOŚCIOWA

Skoro dotychczasowe rozwiązania okazują się nie dość zadowalające, trzeba takiego, które będzie w elegancki sposób łączyć dwie rzeczy – zachowywać intuicje językowe związane z predykatami nieostryimi oraz usuwać paradoks. W tym celu potrzebujemy logiki wielowartościowej. Semantyka, której chcemy użyć, to rozwiązanie w duchu Jana Łukasiewicza (zob. [3], [7], [10], [11]).

Język definiujemy standardowo jak dla logiki klasycznej pierwszego rzędu. To, co musimy zmienić, to wartościowanie.

Definicja 4.

Definiujemy rekurencyjnie wartość logiczną formuły tej logiki. Zbiór wartości logicznych to zbiór liczb rzeczywistych $[0,1]$ (wartości logicznych): $[\cdot] : F \rightarrow [0,1]$.

Dla dowolnego M , dowolnego v , dowolnego x , dowolnego P - predykatu, dowolnej $[\varphi(x)]_{M,v} \in [0,1]$, gdzie $v : Var \rightarrow |M|^5$.

$$[P(a)]_{M,v} = P_M(a_M)$$

$$[P(x)]_{M,v} = P_M(v(x))$$

$$[\neg \varphi]_{M,v} = 1 - [\varphi]_{M,v}$$

$$[\varphi \vee \psi]_{M,v} = \min \{ [\varphi]_{M,v} + [\psi]_{M,v}, 1 \}$$

$$[\varphi \wedge \psi]_{M,v} = \max \{ ([\varphi]_{M,v} + [\psi]_{M,v}) - 1, 0 \}$$

$$[\varphi \Rightarrow \psi]_{M,v} = \min \{ 1 - ([\varphi]_{M,v} - [\psi]_{M,v}), 1 \}$$

$$[\forall n \varphi(n)]_{M,v} = \max \left\{ 1 - \sum_{a \in |M|} (1 - [\varphi(n)]_{M,v(a/n)}), 0 \right\}^6$$

⁵ Dla czytelników słabiej obeznanych z tego rodzaju notacją załączamy niezbędne objaśnienia. Napis $[\varphi(x)]_{M,v} \in [0,1]$ czytamy: wartość formuły φ , w modelu M , przy wartościowaniu v należy do przedziału $[0,1]$ (liczb rzeczywistych). Napis: $v : Var \rightarrow |M|$ powinniśmy rozumieć w ten sposób, że wartościowanie v jest funkcją ze zbioru zmiennych w uniwersum modelu.

⁶ Napis $\sum_{a \in |M|} (1 - [\varphi(n)]_{M,v(a/n)})$ należy rozumieć w ten sposób, że sumujemy wartości $1 - [\varphi(n)]$ w M , przy wartościowaniu zmienionym przez podstawienie a za n , po wszystkich a należących do uniwersum modelu.

Definicja 5.

$\varphi(x)$ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy dla dow. v , dow. M $[\varphi]_{M,v} = 1$

Nietrudno zauważyć, że przy tak zdefiniowanej semantyce działają prawa rachunku zdań, w tym modus ponens. To znaczy⁷:

Dla dow. M , dow. v : $[((\psi \Rightarrow \varphi) \wedge \psi) \Rightarrow \varphi]_{M,v} = 1$

W szczególności też – co warto zauważyć – działa prawo wyłączonego środka.

Definicja 6.

(Definicja spełniania w modelu).

Dla dow. M , dow. φ , dow. x ,

$M \models \varphi(x)[v]$ wtedy i tylko wtedy $[\varphi(x)]_{M,v} \equiv 1$

Oczywiście modele dla takiej logiki będą się różnić od modeli dla logiki klasycznej interpretacją predykatów. W logice klasycznej interpretacje predykatów stanowią n -tki elementów (pewne podzbiory uniwersum modelu). Tutaj będą to funkcje z podzbiorów uniwersum w zbiór wartości logicznych.

Definicja 7.

Dla dow. m -argumentowego predykatu P , $P : |M|^m \rightarrow [0,1]$. Zdefiniujmy nasz predykat „łysy”, tak aby oddać intuicje naturalnojęzykowe dotyczące tego predykatu.

Niech M będzie modelem. O tym modelu należy założyć przynajmniej tyle, że jego uniwersum zawiera liczby naturalne. Dla dowolnego v :

Niech $\varphi(n)$ (czytamy dla dow. x , x posiadający n włosów jest łysy) będzie funkcją z $|M|$ w $[0,1]$ t. z.:

1. $[\varphi(0)]_{M,v} = 1$ (wyraża ekstensję pozytywną)
2. dla $0 < n \leq 10000$, $[\varphi(n)]_{M,v} = [\varphi(n-1)]_{M,v} - \epsilon$ (wyraża stopniowalność tego predykatu, możemy założyć, że $\epsilon = \frac{1}{1000}$)
3. dla $n > 10000$, $[\varphi(n)] = 0$ (wyraża ekstensję negatywną)

Przy takiej definicji zachowujemy więc intuicje dotyczące znaczenia tego predykatu w języku – że posiada on pewną ekstensję pozytywną, negatywną oraz jest stopniowalny.

Jak wygląda nasze rozumowanie (P) przy tak zdefiniowanej semantyce? Oczywiście krok bazowy jest prawdziwy z definicji formuły φ . Wniosek trywialnie fałszywy. Co z przesłanką drugą? Można policzyć, że jej wartość logiczna wynosi dokładnie 0. Tym samym nasze rozumowanie indukcyjne jest zwyczajnie niepoprawne, a nie paradoksalne. (Nie mamy dwóch przesłanek o wartości logicznej 1). Co więcej, teraz możemy zobaczyć, jak w każdym kolejnym kroku indukcyjnym (dla kolejnych n) tracimy naszą pewność (pewien „ułamek prawdy”). Jeśli dla pewnego n , $\varphi(n)$ ma wartość logiczną a , gdzie $a \in [0,1]$, to $\varphi(n+1)$ ma już tylko wartość $a - \epsilon$, $\varphi(n+2)$ zaś wartość $a - 2\epsilon$, etc.

⁷ Sprawdzenie poniższego jest prostym rachunkiem, który pozostawiamy czytelnikom.

Na koniec warto zauważyć, że powyższa semantyka może być interpretowana w ramach logiki klasycznej, w której mamy kontinuum⁸ predykatów. Wówczas, jeśli w naszej semantyce, dla pewnego φ , $[\varphi(p_1, \dots, p_n)] \in [0, 1]$, to w logice klasycznej możemy zdefiniować predykat: $\tilde{\varphi}_v$ t.ż.: $\tilde{\varphi}_v(p_1, \dots, p_n) \Leftrightarrow [\varphi(p_1, \dots, p_n)] \geq v$, gdzie $v \in [0, 1]$.

O wadach rozwiązania, które w tak dużym stopniu zwiększa kardynalność języka, wspominaliśmy już wyżej⁹. Zmiana wartościowania zamiast mnożenia nad potrzebę predykatów jest, jak sądzimy, nie tylko wyjściem bardziej eleganckim, ale też wygodniejszym.

5. WNIOSKI NATURY EPISTEMOLOGICZNEJ

Pokazaliśmy, na czym polegał błąd, który popełnialiśmy w naszym rozumowaniu, a który prowadził do paradoksu. Zasadzał się on na próbie klasycznego (binarnego) traktowania nieostrego predykatu, wymagającego w istocie wielowartościowej semantyki. W momencie, gdy nadaliśmy mu właściwą interpretację i odpowiednio zdefiniowaliśmy semantykę, okazało się, że nie ma żadnego paradoksu.

Jak zostało już zauważone, pomysł rozwiązania paradoksu nieostrości za pomocą logiki więcej niż dwuwartościowej nie jest nowy w filozofii. Pytanie oryginalne brzmi: czy wypływają z tego jakieś filozoficzne wnioski? Zasadniczy nasz wniosek jest taki, że paradoks nieostrości może nam ujawniać niekompatybilność logiki klasycznej w odniesieniu do języków naturalnych. Skoro istnieją w językach naturalnych terminy nieostre (co więcej: wydaje się, że większość naturalnojęzykowych terminów jest nieostra), to okazuje się, że adekwatne semantyki dla tych języków nie mogą się opierać na klasycznej, binarnej logice. A to jest już wniosek o znaczeniu fundamentalnym.

Drugi wniosek jest może mniej oczywisty, ale za to bardziej filozoficzny. Chcemy bowiem zapytać, jaka jest przyczyna tego, że języki naturalne wymagają wielowartościowej czy też rozmytej logiki. Co sprawia, że terminy naturalnojęzykowe mają taki właśnie nieostry charakter? Odpowiedź jest prosta: rzeczywistość i nasz sposób jej poznawania. Języki naturalne służą przede wszystkim do komunikowania informacji – informacji w większości dotyczącej świata. Funkcją, jaką jest opis rzeczywistości, jest jedną z podstawowych funkcji tych języków. Skoro zatem okazuje się, że do tego opisu używamy takich nieostrych terminów, to przyczyna leży gdzieś w opisywanym świecie lub w naszej jego percepcji – albo w obu tych czynnikach jednocześnie.

Oczywiście nie chcemy się posunąć tak daleko, by twierdzić, że rzeczywistość jest nieostra w takim sensie, że jest na przykład nieokreślona. Czy świat

⁸ Czyli tyle, ile w naszej semantyce jest wartości logicznych.

⁹ Z tą różnicą, że w poprzednim przykładzie mieliśmy przeliczalnie wiele predykatów.

jest określony – to już pytanie zupełnie innej natury (nie zamierzamy wnikać teraz w filozoficzne aspekty Heisenberga zasady nieoznaczoności). Chcemy powiedzieć tylko tyle, że może złożoność świata oraz nasze poznawcze ograniczenia zmuszają nas, abyśmy w procesie komunikowania informacji stosowali opis uproszczony. Charakter naszego języka jest więc efektem dwóch czynników – z jednej strony dążenia do adekwatności opisu, a z drugiej do łatwości komunikacji. Taka a nie inna – w tym wypadku nieostra – kategoryzacja rzeczywistości, jakiej dokonujemy, jest również wypadkową tych dwóch czynników.

W takim podejściu nie sposób nie dostrzec ukrytego założenia, że proces ustalania znaczenia terminów jest związany z wchodzeniem użytkowników języka w przyczynowe relacje ze światem. Aby nie wnikać w tym miejscu w rozważanie tak zwanych „przyczynowych teorii odniesienia”, które nasuwają się jako oczywiste skojarzenie, ale z pewnością wymagałyby szerszego i bardziej dogłębnego potraktowania, zauważymy tylko tyle, że na proces konstytuowania odniesienia terminów (np. terminu „łysy”) można spojrzeć w ten sposób, iż następuje ono w efekcie kontaktu użytkowników języka z łysymi (i owłosionymi) ludźmi. Skoro tak jest i skoro w rezultacie terminy te są nieostre, świadczy to o tym, że – biorąc pod uwagę, jak wygląda nasz świat (że nie dzieli się dychotomicznie na przykład na ludzi pozbawionych zupełnie włosów oraz posiadających bujne czupryny) – w procesie komunikacji, aby zachować adekwatność opisu przy minimalnym koszcie poznawczym, stosujemy pewne heurystyki. Rzecz paradoksalna: łatwiejszą komunikację osiągamy używając nieostrych terminów wymagających rozmytej logiki, niż gdybyśmy uparcie trzymali się binarnego opisu. Koszt tego drugiego byłby bowiem zbyt wysoki – wymagałoby to od nas namnożenia liczby predykatów, co mogłoby przekroczyć nasze zdolności poznawcze. Wnioski są więc zatem nie tyle ontologiczne (dotyczące charakteru rzeczywistości jako takiej), ile epistemologiczne – relewantne dla pytania o funkcjonowanie na szych procesów poznawczych. Ostatecznie zaś pojawia się w tym kontekście także kolejny, nieco kontrowersyjny wniosek. Otóż nieostrość przestaje być „wadą języka”, za którą jest zwykle uważana. Nieostrość jest tą cechą języka, która umożliwia nam efektywną komunikację, i jako taka wcale nie powinna być usuwana.

Na zakończenie pozostaje odnieść się do pewnej wątpliwości, która mogłaby się pojawić w kontekście rozważanego stanowiska – mianowicie, czy rzeczywiście stopniowanie wartości logicznej ułatwia komunikację. Mogłoby się bowiem wydawać, że dla komunikacji istotne jest założenie, że nasz rozmówca mówi PRAWDĘ, mimo iż może to być założenie czasem mylne. Rzecz w tym, że prawda chyba jednak nie jest aż tak ważna, jakby się zdawało. Większości twierdzeń wygłaszanych w języku potocznym, za pomocą których się komunikujemy, nie można zaliczyć do zdań prawdziwych, o ile za takowe

uznać jedynie twierdzenia nieznoszące wyjątków – podobne do tych występujących w matematyce. Są to zdania zaledwie PRAWDOPODOBNE, a jednak w ogóle nam to nie przeszkadza. Na przykład zdanie „Jak wcisnąć hamulce, to samochód się zatrzyma” uznajemy za zdanie prawdziwe, chociaż wiemy, że dopuszcza wyjątki. Jest więc ono prawdziwe w większości, czy nawet w istotnej większości, wypadków; jest bardzo bliskie tego, co chcielibyśmy określić mianem prawdy, a co jest dla nas w zasadzie – z uwagi na złożoność świata – nieosiągalne. Taki poziom adekwatności zupełnie jednak wystarcza. W codziennej komunikacji całkowicie zadowolamy się bowiem dobrym przybliżeniem, a co za tym idzie - możliwie jak najlepszym wyeliminowaniem błędu. To zaś, czy wygłaszane przez nas zdania są prawdziwe (w tym doskonałym, metafizycznym wręcz sensie) czy tylko bardzo prawdopodobne, interesuje nas już znacznie mniej¹⁰.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Dummett M. (1975), *Wang's paradox*, „Synthese” 30, s. 301–324.
- [2] Fine K. (1975), *Vagueness, truth and logic*, „Synthese” 30, s. 256–300.
- [3] Hajek P. (2006), *Fuzzy logic*, [w:] *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2006 Edition), Edward N. Zalta [ed.], URL = < <http://plato.stanford.edu/entries/logic-fuzz y/> >.
- [4] Halden S. (1949), *The Logic of Nonsense*, Uppsala: Uppsala Universitets Arskrift.
- [5] Hyde D., (2008), *Sorites paradox*, [w:] *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2008 Edition), Edward N. Zalta [ed.], forthcoming URL= <http://plato.stanford.edu/archives/fall_2008/entries/soritesparadox/>.
- [6] Goguen J.A. (1969), *The logic of inexact concepts*, „Synthese” 19, s. 325–373.
- [7] Gottwald S. (2006), *Many-valued logic*, [w:] *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2006 Edition), Edward N. Zalta [ed.], URL= < <http://plato.stanford.edu/entries/logicmanyvalued/>.
- [8] Keefe, R. (2000), *Theories of Vagueness*, Cambridge: Cambridge University Press.
- [9] Kröner S. (1960), *The Philosophy of Mathematics*, London: Hutchinson.
- [10] Łukasiewicz J. (1929), *Elementy logiki matematycznej*, [w:] M. Presburger [red.], Warszawa: Nakładem Komisji Wydawniczej Koła Matematyczno-Fizycznego Słuchaczy Uniwersytetu Warszawskiego.

¹⁰ W świetle powyższego znika również problem, który wydaje się główną trudnością rozwiązania odwołującego się do semantyki wielowartościowej - mianowicie fakt, że również tutaj wprowadza się pewne ostre granice. Dla rozważanego przez nas predykatu „łysy” są to 0 i 10 000. Dlaczego akurat takie a nie inne? Odpowiedź jest prosta. Nie ma to większego znaczenia. Ważne jest jedynie, że te granice leżą w zakresie tego, co się określa mianem ekstensji pozytywnej i negatywnej. Reszta jest kwestią rosnącej lub malejącej adekwatności wygłaszanych zdań, zastosowanych do zróżnicowanych przypadków (łysości).

- [11] Ł u k a s i e w i c z J. (1961), *Z zagadnień logiki i filozofii*, [w:] tenże, *Pisma wybrane*, J. Słupecki [red.], Warszawa: PWN.
- [12] S o r e n s e n R., *Vagueness*, [w:] *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2008 Edition), Edward N. Zalta (ed.), forthcoming URL = < <http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/vagueness/> > .
- [13] — (2001), *Vagueness and Contradiction*, New York: Oxford University Press.
- [14] T y e M. (1994), *Sorites paradoxes and the semantics of vagueness*, [w:] J. Tomberlin [ed.], *Philosophical Perspectives: Logic and Language*.
- [15] W i l l i a m s o n T. (1994), *Vagueness*, London: Routledge.
- [16] W i l l i a m s o n T. (2000), *Knowledge and its Limits*, Oxford: Oxford University Press.
- [17] Z a d e h L. (1975), *Fuzzy logic and approximate reasoning*, „Synthese” 30, s. 407–428.