Studia Semiotyczne, t. XXXII, nr 2 (2018), s. 9–32
ISSN 0137-6608, e-ISSN 2544-073X
DOI: 10.26333/sts.xxxii2.02

Przekład

Kurt Gödel*

O PEWNYCH ZASADNICZYCH TWIERDZENIACH DOTYCZĄCYCH PODSTAW MATEMATYKI I WNIOSKACH Z NICH PŁYNĄCYCH**

Badania nad podstawami matematyki przyniosły w ostatnich dziesięcioleciach wyniki, które wydają mi się ciekawe nie tylko dla nich samych, lecz także z uwagi na wnioski, jakie płyną z nich w odniesieniu do tradycyjnych problemów filozoficznych dotyczących natury matematyki. Same wyniki są dość szeroko znane, mimo to jednak sądzę, że warto raz jeszcze przedstawić je w zarysie, zwłaszcza w obliczu faktu, że dzięki pracy szeregu matematyków zyskały one znacznie doskonalszą formę, niż miały pierwotnie. Największy postęp, mający decydujące znaczenie dla tych wyników, stał się możliwy dzięki precyzyjnemu

** Artykuł jest przekładem pracy Gödel (1995). Jest to tekst wykładu wygłoszonego przez Gödla pt. *Some basic theorems on the foundations of mathematics and their philosophical implications* 26 grudnia 1951 r. na Uniwersytecie Browna w Providence w stanie Rhode Island. Wykład miał miejsce w ramach cyklu wykładów Josiah Willard Gibbs Lectures, organizowanych przez Amerykańskie Towarzystwo Matematyczne dorocznie na różnych uniwersytetach amerykańskich począwszy od 1924 r. Ich zasadniczym celem jest przedstawienie wkładu, jaki współczesna matematyka wnosi do ludzkiego rozumienia świata. Wśród osób zaproszonych do wygłoszenia wykładów im. Gibbsa znaleźli się prócz Gödla m.in. G.H. Hardy, A. Einstein, J. von Neumann, S. Chandrasekhar, H. Weyl, N. Wiener, C.E. Shannon, E.P. Wigner, H.A. Simon, S. Weinberg, E. Witten, R. Penrose [przyp. tłumacza].

zdefiniowaniu pojęcia skończonej procedury[1]. Definicję taką można uzyskać na różne sposoby, które w efekcie dają dokładnie to samo pojęcie. Najbardziej zadowalający sposób polega moim zdaniem na sprowadzeniu pojęcia skończonej procedury do pojęcia maszyny o skończonej liczbie części, co uczynił brytyjski matematyk Turing. Co do filozoficznych konsekwencji wspomnianych wyników, nie sądzę, by kiedykolwiek należycie je przedyskutowano, czy choćby zwrócono na nie uwagę.

Wyniki metamatematyczne, które mam na myśli, skupiają się wokół jednego, podstawowego faktu. Można wręcz powiedzieć, że stanowią jedynie różne jego aspekty. Fakt ten można by określić jako zasadniczą niezupełność (*incompletability*) lub niewyczerpalność (*inexhaustibility*) matematyki. W najprostszej formie napotykamy go wtedy, gdy metodę aksjomatyczną stosujemy nie do jakiegoś systemu hipotetyczno-dedukcyjnego w rodzaju geometrii (gdzie matematyk może głosić jedynie warunkową prawdziwość twierdzeń), lecz do matematyki właściwej, tj. do tych wszystkich zdań matematycznych, które są prawdziwe w sensie absolutnym, bez żadnych dodatkowych założeń. Zdania tego rodzaju muszą istnieć, inaczej bowiem nie mogłyby również istnieć żadne twierdzenia hipotetyczne. Np. *pewne* implikacje o postaci *jeżeli przyjąć takie a takie aksjomaty, to prawdziwe jest takie a takie twierdzenie* koniecznie muszą być prawdziwe w sensie absolutnym. Taki sam charakter ma też niewątpliwie dowolne twierdzenie finitystycznej teorii liczb, np. $2 + 2 = 4$. Oczywiście zadanie zaksjomatyzowania matematyki właściwej odbiega od zwykłego rozumienia aksjomatyki. W pierwszym przypadku bowiem aksjomaty nie są dowolne, lecz muszą stanowić trafne zdania matematyczne, w dodatku oczywiste bez dowodu. Nie sposób uniknąć konieczności przyjmowania pewnych aksjomatów lub reguł wnioskowania jako oczywistych bez dowodu, dowody muszą bowiem mieć jakiś początek. Istnieją jednak bardzo różne poglądy na zakres tego, co określiłem jako matematykę właściwą. Np. intuicjoniści i finityści odrzucają niektóre z jej aksjomatów i pojęć, uznawane przez innych, np. zasadę wyłączonego środka czy ogólne pojęcie zbioru.

[1] Pojęcie to, na użytek zastosowań rozważanych w tym wykładzie, jest równoważne pojęciu „obliczalnej funkcji liczb całkowitych" (tj. takiej, której definicja faktycznie umożliwia obliczenie $f(n)$ dla każdej liczby całkowitej n). Procedury, które będą tu rozważane, operują nie na liczbach całkowitych, lecz na formułach, jednak z uwagi na numerację wchodzących w grę formuł można je zawsze sprowadzić do procedur operujących na liczbach całkowitych.

Jednak zjawisko niewyczerpalności matematyki[2] zawsze daje o sobie znać w tej czy innej formie, bez względu na to jakie stanowisko zajmujemy. Wystarczy zatem jeśli objaśnię je na przykładzie najprostszego i najbardziej naturalnego stanowiska, które przyjmuje matematykę taką jaka jest, nie okrawając jej w żaden sposób. Z tego punktu widzenia matematyka jest sprowadzalna do abstrakcyjnej teorii mnogości. Np. powiedzenie, że aksjomaty geometrii rzutowej pociągają za sobą pewne twierdzenie, znaczy, że jeżeli pewien zbiór *M* elementów zwanych punktami oraz pewien zbiór *N* podzbiorów zbioru *M*, zwanych liniami prostymi, spełniają te aksjomaty, to rozważane twierdzenie zachodzi dla *M* i *N*. By przytoczyć inny przykład: twierdzenia teorii liczb można interpretować jako mówiące o zbiorach skończonych. Zasadniczym problemem jest tu więc aksjomatyzacja teorii mnogości. Otóż gdy zajmujemy się tym problemem, wynik okazuje się zupełnie różny od tego, czego można by oczekiwać. Zamiast, jak w geometrii, otrzymać skończoną liczbę aksjomatów, stajemy w obliczu nieskończonego szeregu aksjomatów, który można dowolnie wydłużać bez perspektywy końca i najprawdopodobniej bez możliwości zebrania wszystkich tych aksjomatów w jakiejś skończonej regule ich wytwarzania[3]. Dzieje się tak dlatego, że jeśli chcemy uniknąć paradoksów teorii mnogości, bez wprowadzania elementów całkowicie obcych w stosunku do faktycznego postępowania matematycznego, to pojęcie zbioru musi być aksjomatyzowane krok po kroku[4]. Jeżeli np. zaczynamy od liczb całkowitych, tj. szczególnego rodzaju zbiorów skończonych, to najpierw mamy zbiory liczb całkowitych i odnoszące się do nich aksjomaty (aksjomaty pierwszego poziomu), następnie zbiory zbiorów liczb całkowitych z odpowiednimi aksjomatami (aksjomatami drugiego poziomu) i tak dalej, dla dowolnej skończonej iteracji opera-

[2] Przez „matematykę" tu i w dalszym ciągu należy rozumieć „matematykę właściwą" (która oczywiście zawiera logikę formalną w tej mierze, w jakiej ta uchodzi za trafną z punktu widzenia danego stanowiska).

[3] W aksjomatykach dziedzin pozamatematycznych, jak np. geometria fizyczna, zakłada się matematykę właściwą; aksjomatyzacja dotyczy natomiast treści danej dyscypliny tylko w tej mierze, w jakiej wykracza ona poza matematykę właściwą. Treść ta, przynajmniej w dotychczas napotkanych przypadkach, daje się wyrazić w skończonej liczbie aksjomatów.

[4] Okoliczność ta nie jest od razu widoczna przy zwykłym sposobie przedstawiania aksjomatów, jednak wychodzi na jaw, gdy bliżej zastanawiamy się nad ich znaczeniem.

cji „zbiór”[5]. Następnie mamy zbiór wszystkich tych zbiorów skończonego rzędu. Ale zbiór ten możemy znów potraktować w dokładnie taki sam sposób, w jaki przedtem potraktowaliśmy zbiór liczb całkowitych, tzn. możemy rozważać jego podzbiory (tj. zbiory rzędu ω) i formułować aksjomaty dotyczące ich istnienia. Postępowanie to można oczywiście rozszerzyć poza ω, dochodząc do dowolnej pozaskończonej liczby porządkowej. Jako kolejnego aksjomatu można więc zażądać tego, by iteracja tego postępowania było możliwa dla *dowolnej* liczby porządkowej, tj. dla każdego typu porządkowego należącego do jakiegoś zbioru dobrze uporządkowanego. Ale czy w ten sposób dochodzimy do końca? Bynajmniej. Mamy teraz bowiem nową operację tworzenia zbiorów, a mianowicie budowanie zbioru z pewnego wyjściowego zbioru A i pewnego dobrze uporządkowanego zbioru B przez zastosowanie do A operacji „zbiór” tyle razy, na ile wskazuje dobrze uporządkowany zbiór B[6]. A utożsamiając B z pewnym dobrym porządkiem w zbiorze A, możemy powtarzać tę nową operację w pozaskończoność. To z kolei da początek nowej operacji, którą możemy potraktować w taki sam sposób itd. Kolejny krok będzie więc polegał na przyjęciu, iż każdą operację wytwarzającą zbiory ze zbiorów można powtarzać dla dowolnej liczby porządkowej (tj. typu porządkowego zbioru dobrze uporządkowanego). Ale czy to już koniec? Nie, gdyż możemy przyjąć nie tylko, że opisane przed chwilą postępowanie można zastosować do dowolnej operacji, lecz nadto że powinien istnieć zbiór domknięty ze względu na nie, tj. posiadający taką własność, że jeśli postępowanie to (z dowolną operacją) zastosujemy do elementów tego zbioru, w wyniku otrzymamy również elementy tego zbioru. Zapewne domyślają się już państwo, że wciąż nie doszliśmy do końca, nie może bowiem mieć końca taka procedura tworzenia aksjomatów, gdyż samo doprowadzenie jej do pewnego etapu prowadzi do kolejnego aksjomatu. To prawda, że we współczesnej matematyce nigdy w praktyce nie korzysta się z najwyższych szczebli tej hierarchii. Bez obaw można powie-

[5] Operacja „zbiór” jest w istocie tożsama z operacją „zbiór potęgowy”, gdzie zbiór potęgowy zbioru M jest to na mocy definicji zbiór wszystkich podzbiorów M.

[6] W celu wykonania iteracji można przyjąć, że $A = B$ i założyć, że dla każdego zbioru wskazano pewien dobry porządek. Dla liczb porządkowych drugiego rodzaju [[granicznych liczb porządkowych]] zawsze można utworzyć zbiór wszystkich zbiorów wcześniej otrzymanych [podwójne nawiasy kwadratowe oznaczają uzupełnienia redaktorów *Kurt Gödel: Collected Works* – przyp. red.].

dzieć, że 99,9% dzisiejszej matematyki zamyka się w trzech pierwszych szczeblach. W praktyce zatem całość matematyki *można* sprowadzić do skończonej liczby aksjomatów. Stanowi to jednak przygodną okoliczność historyczną, bez znaczenia dla rozważań dotyczących zasad. Poza tym nie jest rzeczą całkowicie nieprawdopodobną, że ta właściwość dzisiejszej matematyki może mieć coś wspólnego z inną jej cechą, a mianowicie niezdolnością do udowodnienia, pomimo wieloletnich wysiłków, pewnych fundamentalnych twierdzeń, takich jak np. hipoteza Riemanna. Można bowiem pokazać, że aksjomaty dla zbiorów wyższych poziomów są istotne nie tylko dla tych zbiorów, lecz mają konsekwencje nawet dla zbiorów poziomu 0, tj. dla teorii liczb całkowitych. Ściślej mówiąc, każdy z tych aksjomatów teorii mnogości pociąga za sobą rozwiązanie pewnych problemów diofantycznych, które były nierozstrzygalne na podstawie dotychczasowych aksjomatów[7]. Problemy diofantyczne, o które tu chodzi, są następującego typu: Niech $P(x_1,..., x_n, y_1,..., y_m)$ będzie wielomianem o danych współczynnikach całkowitych i $n + m$ zmiennych $x_1,..., x_n, y_1,..., y_m$. Zmienne x_i potraktujmy jako niewiadome, a zmienne y_i jako parametry. Mamy wówczas następujący problem: czy równanie $P = 0$ ma rozwiązania całkowite dla dowolnych całkowitych wartości parametrów, czy też dla pewnych całkowitych wartości parametrów równanie to nie ma rozwiązań całkowitych? Każdemu z aksjomatów teorii mnogości można przyporządkować pewien wielomian P, dla którego sformułowany przed chwilą problem staje się rozstrzygalny na mocy tego aksjomatu. Można nawet osiągnąć to, że rząd wielomianu P nie będzie nigdy wyższy niż 4. Dzisiejsza matematyka nie umie jeszcze wykorzystywać aksjomatów teoriomnogościowych do rozwiązywania problemów teorii liczb, jedyny wyjątek stanowią aksjomaty pierwszego poziomu. Faktycznie używa się ich w analitycznej teorii liczb. Można jednak dowieść, że nie wystarczą

[7] Jeżeli twierdzenie to ma zachowywać ważność także dla stanowiska intuicjonistycznego lub finitystycznego, trzeba założyć niesprzeczność aksjomatów teorii mnogości. Niesprzeczność ta jest czymś oczywistym (można jej więc nie zakładać), jeżeli teorię mnogości uznajemy za matematykę właściwą. Podobne twierdzenie zachodzi jednak również dla matematyki finitystycznej, przy tym bez problematycznego założenia niesprzeczności; mianowicie wprowadzanie funkcji rekurencyjnych coraz wyższych rzędów prowadzi do rozwiązania coraz większej liczby określonego rodzaju problemów z zakresu teorii liczb. W matematyce intuicjonistycznej bez wątpienia zachodzi podobne twierdzenie dotyczące wprowadzania (przez nowe aksjomaty) coraz większych liczb porządkowych należących do drugiej klasy liczb.

one do objęcia całej teorii liczb. Pewien rodzaj teoriomnogościowej teorii liczb, wciąż czekający na odkrycie, z pewnością sięgnąłby znacznie dalej.

Dotychczas próbowałem objaśnić fakt, który nazywam *zasadniczą niezupełnością matematyki*, w odniesieniu do jednego tylko ujęcia podstaw matematyki, a mianowicie aksjomatycznej teorii mnogości. Jednak pewne bardzo ogólne twierdzenia prowadzą do wniosku, że fakt ten jest całkowicie niezależny od przyjętego ujęcia i punktu widzenia. Pierwsze z tych twierdzeń głosi po prostu, że *jakikolwiek dobrze określony zbiór aksjomatów i reguł wnioskowania wybierzemy, zawsze będą istnieć problemy diofantyczne opisanego typu, nierozstrzygalne na mocy tych aksjomatów i reguł, jeżeli tylko nie można z nich wyprowadzić żadnych fałszywych zdań tego typu*[8]. Mówiąc o dobrze określonym systemie aksjomatów i reguł, mam na myśli jedynie, że musi być możliwe faktyczne wypisanie aksjomatów w pewnej ścisłej notacji, a jeśli ich liczba jest nieskończona, należy podać skończoną procedurę pozwalającą wypisać je wszystkie po kolei. Również reguły wnioskowania powinny być takie, że dla dowolnych przesłanek można albo wypisać wniosek (na mocy którejkolwiek z reguł wnioskowania), albo wykazać, że żaden wniosek nie wynika z nich bezpośrednio na mocy rozważanej reguły wnioskowania. Te postulaty pod adresem reguł i aksjomatów są równoważne założeniu, że powinno być możliwe zbudowanie skończonej maszyny, w ścisłym sensie „maszyny Turinga", która mogłaby wypisać po kolei wszystkie konsekwencje aksjomatów. Z tej racji rozważane twierdzenie jest równoważne faktowi, że nie istnieje skończona procedura rozstrzygania dla wszystkich problemów diofantycznych opisanego typu.

Drugie twierdzenie wiąże się z pojęciem niesprzeczności. W przypadku dobrze określonego systemu aksjomatów i reguł zagadnienie ich niesprzeczności samo jest oczywiście dobrze określonym zagadnieniem matematycznym. Co więcej, ponieważ symbole i zdania dowolnego formalizmu są zawsze co najwyżej przeliczalne, wszystko można odzwierciedlić w liczbach całkowitych, jest więc prawdopodobne, i faktycznie da się dowieść, że zagadnienie niesprzeczności można zawsze przekształcić w zagadnienie z zakresu teorii liczb (ściślej mó-

[8] Założenie to można zastąpić niesprzecznością (jak wykazał Rosser w swojej pracy [[1936]]), jednak zdania nierozstrzygalne mają wówczas nieco bardziej skomplikowaną strukturę. Należy nadto dodać założenie, że z aksjomatów wynikają pierwotne własności dodawania, mnożenia i relacji $<$.

wiąc, w jedno z zagadnień wyżej opisanego typu). Otóż twierdzenie to mówi, że *dla dowolnego dobrze określonego systemu aksjomatów i reguł zdanie stwierdzające ich niesprzeczność*[9] *(a raczej równoważne mu zdanie teorii liczb) jest niedowodliwe na podstawie tych aksjomatów i reguł, o ile te aksjomaty i reguły są niesprzeczne i wystarczą do wyprowadzenia określonego fragmentu*[10] *finitystycznej arytmetyki liczb całkowitych*. Właśnie to twierdzenie szczególnie dobrze uwidacznia zasadniczą niezupełność matematyki. Albowiem *wyklucza ono, by ktoś zbudował dobrze określony system aksjomatów i reguł oraz niesprzecznie wygłosił następujące zdanie na jego temat: Wszystkie te aksjomaty i reguły jawią mi się (z matematyczną pewnością) jako trafne, a ponadto uważam, że zawierają one całość matematyki*. Jeżeli ktoś wygłasza takie zdanie, przeczy samemu sobie[11]. Jeżeli bowiem rozważane aksjomaty jawią mu się jako trafne, to jawią mu się one również (z tą samą pewnością) jako niesprzeczne. Posiada zatem wgląd matematyczny niewywodliwy z jego aksjomatów. Należy jednak zachować ostrożność, by należycie zrozumieć znaczenie tego stanu rzeczy. Czy znaczy on, że żaden dobrze określony system trafnych aksjomatów nie może zawierać całej matematyki właściwej? Tak, o ile przez matematykę właściwą rozumiemy system wszystkich prawdziwych zdań matematycznych; nie, jeżeli rozumieć przez nią system wszystkich dowodliwych zdań matematycznych. Oba znaczenia matematyki będę rozróżniać mówiąc o matematyce w sensie obiektywnym i subiektywnym. Z pewnością żaden dobrze określony system trafnych aksjomatów nie może objąć całej matematyki obiektywnej, gdyż zdanie stwierdzające niesprzeczność systemu jest prawdziwe, ale niedowodliwe w tym systemie. Jednak co się tyczy matematyki subiektywnej, nie jest wykluczone, że istnieje skończona reguła dająca w wyniku wszystkie jej oczywiste aksjomaty. Jeżeli jednak reguła taka istnieje, to my, wyposażeni w nasze ludzkie zdolności pojmowania, z pewnością nigdy nie moglibyśmy wiedzieć, że ma ona tę właściwość, tj. nigdy nie moglibyśmy wiedzieć z matematyczną pewnością, że wszystkie zdania, do

[9] Jest to jedno ze zdań nierozstrzygalnych przy założeniu, że nie da się wyprowadzić żadnych fałszywych [[zdań]] teorii liczb (patrz twierdzenie poprzednie).

[10] A mianowicie aksjomatów Peano i reguły definiowania przez zwykłą indukcję, w połączeniu z logiką spełniającą najsurowsze wymogi finitystyczne.

[11] Jeżeli mówi jedynie „Sądzę, że jedno po drugim będą mi się one jawić jako prawdziwe" (przy czym ich liczba ma być nieskończona), nie przeczy samemu sobie (zob. niżej).

których ona prowadzi, są trafne[12]. Lub też, innymi słowy, moglibyśmy postrzegać jako prawdziwe tylko jedno zdanie po drugim, dla dowolnej skończonej ich liczby. Natomiast zdanie głoszące, że wszystkie one są prawdziwe, moglibyśmy znać co najwyżej z empiryczną pewnością, na podstawie wystarczającej liczby przypadków lub na mocy innych wnioskowań indukcyjnych[13]. Gdyby tak było, znaczyłoby to, że umysł ludzki (w dziedzinie czystej matematyki) jest równoważny maszynie skończonej, która jednak nie jest zdolna do pełnego[14] rozumienia swego własnego działania. Ta niezdolność [[człowieka]] do zrozumienia samego siebie jawiłaby mu się opacznie jako jego [[(umysłu)]] bezgraniczność czy niewyczerpalność. Proszę jednak zauważyć, że gdyby tak było, nie uchylałoby to żadną miarą zasadniczej niezupełności matematyki obiektywnej. Przeciwnie, czyniłoby ją tylko jeszcze bardziej uderzającą. Gdyby bowiem umysł ludzki był równoważny skończonej maszynie, matematyka obiektywna nie tylko byłaby zasadniczo niezupełna w tym sensie, że nie byłaby zawarta w żadnym dobrze określonym systemie aksjomatycznym, lecz nadto w tym, że istniałyby absolutnie nierozwiązywalne problemy diofantyczne opisanego wyżej typu, gdzie epitet „absolutnie" znaczy, że byłyby one nierozstrzygalne nie tylko w ramach pewnego określonego systemu aksjomatycznego, lecz przez jakikolwiek dowód matematyczny możliwy do pomyślenia dla ludzkiego umysłu. Nieuchronnie prowadzi to do następującej alternatywy: *bądź matematyka jest zasadniczo niezupełna w tym sensie, że jej oczywistych aksjomatów nigdy nie da się zawrzeć w skończonej regule,*

---

[12] To bowiem (lub konsekwencja tego dotycząca niesprzeczności aksjomatów) stanowiłoby wgląd matematyczny niewywodliwy z rozważanych aksjomatów i reguł, co przeczyłoby założeniu.

[13] Na przykład jest do pomyślenia (choć daleko wykracza poza granice dzisiejszej nauki), że fizjologia mózgu rozwinęłaby się tak dalece, iż byłoby wiadomo z empiryczną pewnością: 1) że mózg wystarczy do wyjaśnienia wszystkich zjawisk umysłowych i że stanowi maszynę w sensie Turinga oraz 2) że taka a taka jest dokładnie budowa anatomiczna i funkcjonowanie fizjologiczne tej części mózgu, która odpowiada za myślenie matematyczne. Jeśli ponadto zajmujemy stanowisko finitystyczne (lub intuicjonistyczne), to takie wnioskowanie indukcyjne mogłoby opierać się na (mniej lub bardziej empirycznym) przekonaniu, że matematyka niefinitystyczna (lub nieintuicjonistyczna) jest niesprzeczna.

[14] Oczywiście fizyczne działanie mechanizmu myślącego mogłoby być w pełni zrozumiałe; jednak wgląd w to, że ten konkretny mechanizm musi zawsze prowadzić do trafnych (czy choćby niesprzecznych) wyników, przekraczałoby zdolności rozumu ludzkiego.

co znaczy, że umysł ludzki (nawet w dziedzinie czystej matematyki) nieskończenie przewyższa moc dowolnej skończonej maszyny, bądź istnieją absolutnie nierozwiązywalne problemy diofantyczne wskazanego wyżej typu (przy czym nie jest wykluczone, że oba człony alternatywy są prawdziwe, istnieją więc, ściśle biorąc, trzy możliwości). To właśnie ten, dowiedziony matematycznie fakt wydaje mi się ogromnie interesujący filozoficznie. W tym kontekście ma oczywiście wielkie znaczenie to, że przynajmniej on jest całkowicie niezależny od stanowiska, jakie zajmujemy w kwestii podstaw matematyki[15].

Niezależność ta jest jednak pod jednym względem ograniczona, a mianowicie zajmowane stanowisko musi być na tyle liberalne, by dopuszczać jako sensowne zdania mówiące o wszystkich liczbach całkowitych. Gdyby ktoś był tak ścisłym finitystą, że twierdziłby, iż tylko jednostkowe zdania typu $2 + 2 = 4$ należą do matematyki właściwej[16], twierdzenie o zasadniczej niezupełności nie dotyczyłoby go – w każdym razie nie to twierdzenie o zasadniczej niezupełności. Nie sądzę jednak, by takiej postawy można było trzymać się w sposób spójny, dokładnie ten sam rodzaj świadectw każe nam sądzić, że $2 + 2 = 4$ oraz

[15] Dla intuicjonistów i finitystów twierdzenie to ma postać implikacji (a nie alternatywy). Należy odnotować, że intuicjoniści zawsze głosili pierwszy człon alternatywy (i przeczyli drugiemu, gdyż nie mogą ich zdaniem istnieć zdania, których nierozstrzygalność byłaby dowodliwa). To jednak nie ma żadnego znaczenia dla kwestii, która ewentualność stosuje się do matematyki intuicjonistycznej, jeżeli występujące w niej terminy rozumieć w sensie obiektywnym (odrzucanym przez intuicjonistów jako pozbawiony znaczenia). Co się tyczy finityzmu, bardzo prawdopodobne jest, że pierwszy człon alternatywy jest fałszywy.

[16] „Stanowisko implikacjonistyczne" K. Mengera (1930, s. 323), rozumiane w najściślejszym sensie, prowadziłoby do takiej postawy, według niego bowiem jedynymi sensownymi zdaniami matematycznymi (tj., w mojej terminologii, jedynymi należącymi do matematyki właściwej) byłyby te, które stwierdzają, że taki a taki wniosek można wyprowadzić z takich a takich aksjomatów i reguł wnioskowania w taki a taki sposób. Zdanie to jest jednak pod względem logicznym dokładnie takie samo jak $2 + 2 = 4$. A oto niektóre z niedających się utrzymać konsekwencji tego stanowiska: zdanie przeczące mówiące, że wniosku B nie można wyprowadzić z aksjomatów i reguł A, nie należałoby do matematyki właściwej; nie byłoby więc o nim wiadomo nic prócz tego, że wynika ono z pewnych innych aksjomatów i reguł. Jednak (ponieważ te inne aksjomaty i reguły są arbitralne) dowód, że zdanie to z nich wynika, żadną miarą nie wykluczałby możliwości, że (pomimo formalnego dowodu czegoś przeciwnego) pewnego dnia uda się wywieść B z A. Z tego samego powodu zwykły indukcyjny dowód tego, że $a + b = b + a$, nie wykluczałby możliwości odkrycia dwóch liczb całkowitych nie spełniających tego równania.

że $a + b = b + a$ dla dowolnych dwóch liczb całkowitych a, b. Co więcej, stanowisko to, by zachować spójność, musiałoby również wykluczyć pojęcia odnoszące się do wszystkich liczb całkowitych, takie jak „+" (lub do wszystkich formuł, jak „poprawny dowód zgodny z takimi a takimi regułami"), i zastąpić je innymi, mającymi zastosowanie jedynie do pewnej skończonej dziedziny liczb całkowitych (lub formuł). Należy jednak zauważyć, że choć prawdziwość naszej alternatywy jest niezależna od zajmowanego stanowiska, kwestia, który z jej członów jest prawdziwy, nie musi być od niego niezależna (zob. przypis 15).

Myślę, że wystarczająco już objaśniłem matematyczne aspekty sytuacji i mogę przejść z kolei do implikacji filozoficznych. Oczywiście, w następstwie mało zaawansowanego stanu filozofii w naszych czasach nie należy oczekiwać, że wnioski te zostaną wyciągnięte z matematyczną ścisłością.

Odpowiednio do alternatywnej formy głównego twierdzenia o zasadniczej niezupełności matematyki, jego implikacje filozoficzne *prima facie* też będą miały postać alternatywy; w każdym wypadku jednak okażą się zdecydowanie przeciwstawne filozofii materialistycznej. Jeżeli mianowicie prawdziwy jest pierwszy człon alternatywy, to wydaje się stąd wynikać, że działania umysłu ludzkiego nie da się sprowadzić do działania mózgu, który wedle wszelkich danych jest skończoną maszyną o skończonej liczbie części, a mianowicie neuronów i ich połączeń. Zdaje się to prowadzić do jakiejś wersji stanowiska witalistycznego. Z kolei drugi człon alternatywy, głoszący istnienie absolutnie nierozstrzygalnych zdań matematycznych, wydaje się obalać pogląd, że matematyka jest jedynie naszym wytworem; twórca bowiem z konieczności zna wszystkie własności swych wytworów, gdyż nie mogą one mieć żadnych własności prócz tych, które on im nadał. Tak więc ten człon alternatywy zdaje się implikować, że przedmioty i fakty matematyczne (lub przynajmniej coś w nich) istnieją obiektywnie i niezależnie od naszych czynności umysłowych i decyzji, a zatem wydaje się implikować taką czy inną formę platonizmu lub „realizmu" w odniesieniu do przedmiotów matematycznych[17]. Albowiem empiryczna interpretacja

[17] Nie istnieje termin dostatecznie ogólny, by wyrazić dokładnie ten wniosek, który mówi tylko tyle, że przedmioty i twierdzenia matematyki są tak samo obiektywne i niezależne od naszych wolnych wyborów i aktów twórczych, jak świat fizyczny. Nie rozstrzyga on jednak w żaden sposób, czym są te obiektywne byty, a w szczególności, czy są umiejscowione w przyrodzie, ludzkim umyśle czy ani

matematyki[18], tj. pogląd że fakty matematyczne są szczególnym rodzajem faktów fizycznych lub psychologicznych, jest zbyt niedorzeczna, by można ją było poważnie podtrzymywać (patrz niżej). Nie wiadomo, czy pierwszy człon alternatywy jest prawdziwy, w każdym jednak razie jest on zgodny z poglądami niektórych spośród czołowych przedstawicieli fizjologii mózgu i nerwów, którzy bardzo stanowczo przeczą możliwości czysto mechanistycznego wyjaśnienia procesów psychicznych i nerwowych.

Co się tyczy drugiego członu alternatywy, ktoś mógłby zaoponować wskazując na to, że budowniczy nie musi koniecznie znać *każdej* własności tego, co buduje. Na przykład budujemy maszyny, a mimo to nie potrafimy przewidzieć ich zachowania pod każdym względem. Jest to jednak bardzo mizerny zarzut. Maszyn nie tworzymy bowiem z niczego, lecz budujemy z pewnych danych z góry materiałów. Gdyby sytuacja w matematyce była podobna, ten materiał czy podstawa naszych konstrukcji byłyby czymś obiektywnym i wymuszałyby na nas zajęcie stanowiska realistycznego, nawet gdyby pewne inne składniki matematyki były naszym własnym wytworem. Byłoby tak również wtedy, gdybyśmy w naszych twórczych poczynaniach używali jakiegoś narzędzia znajdującego się w nas, jednak różnego od naszego ja (np. „rozumu", interpretowanego jako coś w rodzaju maszyny myślącej). Wówczas bowiem fakty matematyczne wyrażałyby (przynajmniej po części) własności tego narzędzia, które istniałoby obiektywnie.

---

tu, ani tam. Te trzy poglądy na naturę matematyki odpowiadają dokładnie trzem poglądom na naturę pojęć, które tradycyjnie noszą miana psychologizmu, arystotelesowskiego realizmu i platonizmu.

[18] Tj. pogląd, że przedmioty matematyczne i sposób, w jaki je poznajemy, nie różnią się istotnie od przedmiotów fizycznych czy psychicznych oraz praw przyrody. Prawdziwy stan rzeczy jest przeciwny: jeżeli zakładamy obiektywność matematyki, to od razu wynika stąd wniosek, że jej przedmioty muszą być całkowicie odmienne od przedmiotów zmysłowych, ponieważ: 1) Zdania matematyczne, poprawnie zanalizowane, nie mówią niczego o faktycznym świecie w czasie i przestrzeni. Jest to szczególnie jasne w przypadku zdań stosowanych, jak np.: „Wczoraj padał deszcz lub nie padał deszcz". Uwaga ta nie wyklucza istnienia wiedzy czysto pojęciowej (poza matematyką) spełniającej te wymogi. 2) Przedmioty matematyczne poznajemy w sposób ścisły, a prawa ogólne można poznawać w sposób pewny, tj. w wyniku wnioskowania dedukcyjnego, a nie indukcyjnego. 3) Można je poznawać (w zasadzie) bez użycia zmysłów (tj. za pomocą samego rozumu), właśnie dlatego, że nie dotyczą faktów, o których informują nas zmysły (w tym zmysł wewnętrzny), lecz możliwości i niemożliwości.

Po trzecie, ktoś mógłby zaoponować, że znaczenie zdania mówiącego o wszystkich liczbach całkowitych może polegać jedynie na istnieniu ogólnego dowodu, nie sposób bowiem sprawdzić go po kolei dla wszystkich liczb całkowitych. A przeto w przypadku nierozstrzygalnego zdania o wszystkich liczbach całkowitych ani ono samo, ani jego negacja nie są prawdziwe. Ani jedno, ani drugie nie wyraża zatem żadnej obiektywnie istniejącej, ale nieznanej własności liczb całkowitych. Nie jestem teraz w stanie rozważyć kwestii epistemologicznej, czy pogląd ten jest w ogóle spójny. Z pewnością wydaje się, że najpierw trzeba rozumieć znaczenie zdania, zanim będzie można zrozumieć jego dowód, że zatem znaczenia „wszystkich" nie można zdefiniować za pomocą znaczenia „dowodu". Jednak niezależnie od tych dociekań epistemologicznych chciałbym zwrócić uwagę na to, że można przypuszczać prawdziwość zdania ogólnego (np. że będę w stanie potwierdzić pewną własność dla dowolnej danej mi liczby całkowitej), a jednocześnie przypuszczać, że nie istnieje ogólny dowód tego faktu. Łatwo sobie wyobrazić sytuacje, w których oba przypuszczenia mogą być bardzo dobrze ugruntowane. Co się tyczy pierwszego z nich, byłoby tak np. w przypadku, gdyby rozważane zdanie było równaniem $F(n) = G(n)$, po którego obu stronach występowałyby funkcje arytmetyczne, i które można by sprawdzić aż do bardzo dużych liczb n[19]. Co więcej, podobnie jak w naukach przyrodniczych, ta *inductio per enumerationem simplicem* bynajmniej nie stanowi jedynej możliwej do pomyślenia metody indukcyjnej w matematyce. Przyznaję, że każdy matematyk ma wrodzoną niechęć do przydawania argumentom indukcyjnym znaczenia większego niż czysto heurystyczne. Sądzę jednak, że jest to wyłącznie skutek przesądu, że przedmioty matematyczne są w jakimś sensie pozbawione rzeczywistego istnienia. Jeżeli matematyka opisuje obiektywny świat tak samo jak fizyka, nie ma powodu, dla którego metody

[19] Takie sprawdzenie równości (ale nie nierówności) dwóch funkcji arytmetycznych o nie nazbyt skomplikowanej czy sztucznej strukturze z pewnością przydawałoby wielkiego prawdopodobieństwa ich pełnej równości, aczkolwiek jego wartość w liczbach nie mogłaby zostać oszacowana w obecnym stanie nauki. Łatwo jednak można podać przykłady zdań ogólnych o liczbach całkowitych, dla których prawdopodobieństwo to można oszacować nawet dzisiaj. Np. prawdopodobieństwo zdania stwierdzającego, że dla każdego n istnieje co najmniej jedna cyfra $\neq 0$ między n-tą a n^2-tą cyfrą rozwinięcia dziesiętnego liczby π, jest zbieżne do 1 dla coraz większych n. Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku twierdzeń Goldbacha i Fermata [[*sic*]].

indukcyjne nie mogłyby być stosowane w matematyce tak samo jak w fizyce. Faktem jest, że w matematyce wciąż przeważa ta sama postawa, która dawnej obowiązywała w stosunku do całej nauki, a mianowicie próbujemy wyprowadzać wszystko za pomocą konkluzywnych dowodów z definicji (czyli, w terminologii ontologicznej, z istot rzeczy). Przypuszczalnie metoda ta, o ile pretenduje do monopolu, jest równie błędna w matematyce, jak była w fizyce.

Rozważania te pokazują przy okazji, że implikacje filozoficzne przedstawionych faktów matematycznych nie leżą bez reszty po stronie filozofii racjonalistycznej lub idealistycznej, lecz pod jednym względem przemawiają na korzyść stanowiska empirystycznego[20]. To prawda, że tylko drugi z członów alternatywy wskazuje w tym kierunku. Jednak – i tę właśnie kwestię chcę teraz rozważyć – wydaje mi się, że wnioski filozoficzne płynące z przyjęcia drugiego członu alternatywy, w szczególności realizm pojęciowy (platonizm), znajdują również wsparcie we współczesnych osiągnięciach w dziedzinie podstaw matematyki bez względu na to, który z członów alternatywy jest prawdziwy. Główne argumenty na rzecz takiej oceny sytuacji wydają mi się następujące.

Przede wszystkim, gdyby matematyka była naszym swobodnym wytworem, niewiedza dotycząca przedmiotów, które stworzyliśmy, mogłaby wprawdzie mieć miejsce, jednak tylko wskutek braku jasnej świadomości tego, co rzeczywiście stworzyliśmy (lub może wskutek praktycznych trudności, jakich nastręczają zbyt skomplikowane obliczenia). Powinna zatem zniknąć (przynajmniej w zasadzie, choć może nie w praktyce)[21], gdy tylko osiągniemy pełną jasność. Tymczasem, choć współczesne badania w dziedzinie podstaw matematyki osiągnęły niespotykany wcześniej stopień ścisłości, nie przyczyniło się to praktycznie w ogóle do rozwiązania problemów matematycznych.

Po drugie, działalność matematyka w bardzo niewielkim stopniu cechuje swoboda, jaką powinien cieszyć się twórca. Nawet gdyby, dajmy na to, aksjomaty opisujące liczby całkowite były swobodnym wynalazkiem, trzeba przyznać, że wyobraziwszy sobie pierwszych kilka

[20] Mówiąc dokładniej, sugerują one, że sytuacja w matematyce nie jest aż tak odmienna od tej w naukach przyrodniczych. To, czy w ostatecznym rachunku rację ma aprioryzm czy empiryzm, jest już inną kwestią.

[21] To znaczy, że każdy problem powinien być sprowadzalny do pewnego skończonego obliczenia.

własności swych przedmiotów, matematyk osiąga kres swych zdolności twórczych i nie jest w stanie do woli stwarzać również prawdziwości swych twierdzeń. Jeżeli w matematyce istnieje w ogóle jakaś twórczość, to każde twierdzenie stanowi pewne ograniczenie swobody tworzenia. Ale to, co ogranicza twórczość, musi oczywiście istnieć niezależnie od niej[22].

I po trzecie, jeżeli przedmioty matematyki są naszymi tworami, to oczywiście liczby całkowite i zbiory liczb całkowitych muszą być dwoma różnymi tworami, z których pierwszy nie pociąga za sobą koniecznie drugiego. Tymczasem do udowodnienia pewnych zdań o liczbach całkowitych konieczne jest pojęcie zbioru liczb całkowitych. By zatem stwierdzić, jakie własności m y nadaliśmy pewnym przedmiotom w naszej wyobraźni, musimy najpierw stworzyć pewne inne przedmioty – zaiste, bardzo dziwna sytuacja!

To, co powiedziałem dotychczas, sformułowane zostało przy użyciu dość nieostrego pojęcia „swobodnej twórczości" lub „swobodnej inwencji". Próbowano nadać tym terminom bardziej precyzyjne znaczenie. Ma to jednak tylko taki skutek, że również obalenie rozważanego stanowiska zyskuje na precyzji i dobitności. Chciałbym pokazać to szczegółowo na przykładzie najbardziej precyzyjnego, a zarazem najbardziej radykalnego z podanych dotychczas sformułowań. Chodzi o interpretację zdań matematycznych jako wyrażających jedynie pewne aspekty konwencji syntaktycznych (lub językowych)[23], czyli po pro-

[22] Nie można powiedzieć, że ograniczenia te powstają wskutek wymogu niesprzeczności, który sam jest naszym wolnym wyborem, ktoś mógłby bowiem wybrać stworzenie niesprzeczności *i* pewnych twierdzeń. Na nic nie zda się też powiedzenie, że twierdzenia jedynie powtarzają (w całości lub w części) własności uprzednio wynalezione, wówczas bowiem ścisłe ujęcie tego, co zostało uprzednio założone, musiałoby wystarczyć do rozstrzygnięcia dowolnej kwestii pojawiającej się na gruncie teorii, temu jednak przeczy pierwszy [[argument (wyżej)]] i trzeci argument [[(niżej)]].

[23] Chodzi o to, że konwencje nie mogą odnosić się do żadnych obiektów pozajęzykowych (co ma miejsce w przypadku definicji wskazującej), lecz mają ustalać reguły dotyczące znaczenia i prawdziwości wyrażeń symbolicznych wyłącznie na podstawie ich zewnętrznej budowy. Ponadto reguły te nie mogą oczywiście implikować prawdziwości ani fałszywości żadnych zdań o faktach (w takim przypadku bowiem z pewnością nie można by ich nazwać pozbawionymi treści czy syntaktycznymi). To jednak pociąga za sobą ich niesprzeczność, sprzeczność bowiem (w logice klasycznej, którą tu zakładamy) implikowałaby każde zdanie o faktach. Należy zauważyć, że jeśli termin „reguła syntaktyczna" rozumieć w tak ogólny sposób,

stu powtarzających fragmenty tych konwencji. W myśl tego poglądu zdania matematyki, należycie zanalizowane, muszą okazać się równie pozbawione treści, jak np. zdanie „Wszystkie ogiery są końmi". Każdy się zgodzi, że zdanie to nie wyraża żadnego faktu zoologicznego ani żadnego innego obiektywnego faktu, gdyż jego prawdziwość zasadza się wyłącznie na okoliczności, że wybraliśmy termin „ogier" jako skrót terminu „koń płci męskiej".

Zdecydowanie najpowszechniejszym typem konwencji symbolicznych są definicje (wyraźne lub kontekstowe, przy czym te drugie muszą pozwalać na eliminację terminu definiowanego we wszystkich kontekstach, w których on występuje). Przeto najprostsza wersja rozważanego poglądu polegałaby na powiedzeniu, że zdania matematyczne są prawdziwe wyłącznie na mocy definicji terminów w nich występujących, tj. że zastępując krok po kroku wszystkie terminy przez ich definiensy można każde twierdzenie sprowadzić do wyraźniej tautologii $a = a$ (zauważmy, że $a = a$ należy uznać za prawdziwe, o ile za takowe uznajemy definicje, można bowiem zdefiniować b przez $b = a$, a następnie na mocy tej definicji zastąpić w tej równości b przez a).

Jednakże ze wspomnianych wcześniej twierdzeń bezpośrednio wynika, że takie sprowadzenie do wyraźnych tautologii jest niemożliwe. Natychmiast bowiem dostarczyłoby ono mechanicznej procedury roz-

---

to rozważany teraz pogląd obejmuje, jako jego uszczegółowienie, formalistyczne ugruntowanie matematyki. Zgodnie z tym ostatnim bowiem matematyka opiera się w całości na pewnych regułach syntaktycznych o postaci: zdania o takiej a takiej budowie są prawdziwe [aksjomaty], i jeżeli zdania o budowie… są prawdziwe, to prawdziwe są również takie a takie zdania; a ponadto, o czym łatwo się przekonać, dowód niesprzeczności daje gwarancję, że reguły te są pozbawione treści, skoro nie wynikają z nich żadne zdania o faktach. Z drugiej strony okaże się w dalszym ciągu, że również odwrotnie, wykonalność programu nominalistycznego pociąga za sobą wykonalność programu formalistycznego (bardzo klarowne prezentacje filozoficznych aspektów tego nominalistycznego poglądu można znaleźć w pracy Hahna [1935] lub Carnapa [1935]). Można mieć wątpliwości, czy ten (nominalistyczny) pogląd należy w ogóle zaliczać do poglądów uznających matematykę za swobodny twór umysłu, ponieważ przeczy on całkowicie istnieniu przedmiotów matematycznych. Poza tym związki między oboma typami poglądów są wyjątkowo ścisłe, gdyż również zgodnie z drugim z nich istnienie przedmiotów matematycznych polega wyłącznie na ich byciu konstruowanymi w myśli, a z kolei nominaliści nie zaprzeczyliby, że faktycznie wyobrażamy sobie (nieistniejące) przedmioty jako odpowiedniki symboli matematycznych i że te subiektywne przedstawienia mogą nawet dostarczać zasad przewodnich służących wyborowi reguł syntaktycznych.

strzygania prawdziwości lub fałszywości każdego zdania matematycznego. Jednak procedura taka nie może istnieć, nawet dla teorii liczb. To obalenie stosuje się wprawdzie tylko do najprostszej wersji tego (nominalistycznego) stanowiska. Jednak wersje bardziej wyrafinowane nie są w ani trochę lepszej sytuacji. Najsłabsze twierdzenie, które powinno być dowodliwe, by ten pogląd głoszący tautologiczny charakter matematyki dał się utrzymać, jest następujące: Każde dowodliwe zdanie matematyczne można wydedukować wyłącznie z reguł dotyczących prawdziwości i fałszywości zdań (tj. nie używając ani nie biorąc pod uwagę niczego prócz tych reguł), i nie można w ten sposób wyprowadzić negacji dowodliwych zdań matematycznych[24]. W precyzyjnie skonstruowanych językach reguły takie (tj. reguły postulujące, w jakich okolicznościach dane zdanie jest prawdziwe) służą jako środek do określenia znaczenia zdań. Poza tym we wszystkich znanych językach są zdania, które wydają się prawdziwe wyłącznie na mocy tych reguł. Przykładowo, jeżeli alternatywę i negację wprowadzamy za pomocą tych reguł:

1) $p \vee q$ jest prawdziwe, jeżeli co najmniej jeden z członów jest prawdziwy,

oraz

2) $\sim p$ jest prawdziwe, jeżeli p nie jest prawdziwe,

to z reguł tych jasno wynika, że $p \vee \sim p$ jest zawsze prawdziwe, jakiekolwiek byłoby p (zdania dające się w ten sposób wywieść nazywają się tautologiami). Otóż jest rzeczywiście tak, że w symbolice logiki matematycznej, z odpowiednio dobranymi regułami semantycznymi, prawdziwość aksjomatów matematycznych rzeczywiście d a s i ę wywieść z tych reguł[25]; jednakże (i to jest największa przeszkoda) w celu ich wyprowadzenia trzeba się posłużyć matematycznymi i logicznymi poję-

[24] Co się tyczy wymogu niesprzeczności, patrz przyp. 24.

[25] Zobacz prace Ramseya (1926, s. 368, 382) oraz Carnapa (1937, s. 39, 110). Warto wspomnieć, że Ramseyowi udało się nawet sprowadzić je do wyraźnych tautologii $a = a$ za pomocą wyraźnych definicji (patrz s. 23 wyżej), jednak za cenę przyzwolenia na zdania o długości nieskończonej (a nawet pozaskończonej), co oczywiście pociąga za sobą konieczność założenia pozaskończonej teorii mnogości w celu poradzenia sobie z tymi nieskończonymi bytami. Carnap ogranicza się do zdań o skończonej długości, ale za to musi rozważać nieskończone zbiory, zbiory zbiorów etc. tych skończonych zdań.

ciami i aksjomatami w pewien określony sposób, a mianowicie jako odnoszącymi się do symboli, połączeń symboli, zbiorów takich połączeń itd. Dlatego, jeśli teoria ta ma dowodzić tautologicznego charakteru aksjomatów matematycznych, musi najpierw założyć ich prawdziwość. Choć zatem początkowo stanowisko to zmierzało do wytłumaczenia prawdziwości aksjomatów matematycznych poprzez pokazanie, że są one tautologiami, jego punkt dojścia okazuje się dokładnie przeciwny, a mianowicie trzeba n a j p i e r w założyć prawdziwość aksjomatów, a dopiero p o t e m można pokazać, że w odpowiednio dobranym języku są one tautologiami. Co więcej, podobne twierdzenie zachowuje ważność dla pojęć matematycznych, a mianowicie nie sposób zdefiniować ich znaczenia za pomocą konwencji symbolicznych, trzeba bowiem znać wprzódy ich znaczenie, by zrozumieć odpowiednie konwencje syntaktyczne czy dowód, że pociągają one za sobą aksjomaty matematyczne, ale nie ich negacje. Jasne jest teraz, że ta realizacja poglądu nominalistycznego nie spełnia wymogu sformułowanego na s. 24, ponieważ do wyprowadzenia aksjomatów matematycznych używa się nie tylko reguł syntaktycznych, lecz nadto również całej matematyki. Co więcej jednak, ta realizacja nominalizmu dostarczyłaby jego natychmiastowego o b a l e n i a (muszę przyznać, że nie wyobrażam sobie lepszego obalenia tego poglądu, niż ten jego dowód), gdyby przyjąć jedno dodatkowe założenie, a mianowicie że opisany wynik jest nieunikniony (tj. niezależny od wybranego języka symbolicznego i interpretacji matematyki). Otóż, choć nie można dowieść dokładnie tego, można wykazać coś na tyle zbliżonego, że również wystarczy to do obalenia rozważanego poglądu. Otóż na mocy wspomnianych twierdzeń metateoretycznych okazuje się, że dowód tautologicznego charakteru (w odpowiednim języku) aksjomatów matematycznych jest zarazem dowodem ich niesprzeczności, nie może więc być osiągnięty za pomocą s ł a b s z y c h środków dowodowych niż zawarte w samych tych aksjomatach. Nie znaczy to, że w dowodzie niesprzeczności danego systemu trzeba użyć w s z y s t k i c h jego aksjomatów. Zwykle bowiem konieczne do tego celu aksjomaty zewnętrzne wobec systemu czynią zbędnymi niektóre z aksjomatów systemu (choć ich nie implikują)[26].

[26] Przykładowo, dla każdego systemu aksjomatycznego *S* teorii mnogości, należącego do ciągu zdefiniowanego na początku tego wykładu, z dołączonym aksjomatem wyboru, można dowieść niesprzeczności tego systemu za pomocą aksjomatu kolejnego rzędu (lub za pomocą aksjomatu, że *S* jest niesprzeczny) bez

Jedno wszakże wynika stąd z praktyczną koniecznością: by dowieść niesprzeczności klasycznej teorii liczb (i *a fortiori* wszystkich systemów mocniejszych), należy użyć pewnych pojęć abstrakcyjnych (i odnoszących się do nich, bezpośrednio oczywistych aksjomatów), gdzie pojęcia „abstrakcyjne" to takie, które nie odnoszą się do przedmiotów zmysłów[27], których szczególnym rodzajem są symbole. Te abstrakcyjne pojęcia z pewnością jednak nie są syntaktyczne, należą one raczej do pojęć, których uprawomocnienie na drodze rozważań syntaktycznych powinno być głównym zadaniem nominalizmu. Wynika z tego, że *nie istnieje racjonalne uprawomocnienie naszych przedkrytycznych przekonań dotyczących stosowalności i spójności matematyki klasycznej* (nawet jej najbardziej elementarnego szczebla, teorii liczb), *oparte na interpretacji syntaktycznej.* Wprawdzie diagnoza ta nie stosuje się do pewnych podsystemów matematyki klasycznej, które mogą nawet zawierać pewną część teorii pojęć abstrakcyjnych, o które tu chodzi. W tym sensie nominalizm może odnotować częściowy sukces. Faktycznie bowiem jest możliwe oparcie aksjomatów tych systemów na podstawach czysto syntaktycznych. W ten sposób można np. uprawomocnić syntaktycznie użycie pojęć „wszystkie" i „istnieje" w odniesieniu do liczb całkowitych (tj. wykazać jego niesprzeczność). Jednak co się tyczy najważniejszego aksjomatu teorii liczb, indukcji zupełnej, takie syntaktyczne ugruntowanie, nawet w tych granicach, w jakich jest możliwe, nie uprawomocnia naszej przedkrytycznej wiary w ten aksjomat, gdyż jego samego musi się uży-

---

uciekania się do aksjomatu wyboru. Podobnie, nie jest rzeczą niemożliwą wykazanie niesprzeczności aksjomatów niższych szczebli tej hierarchii za pomocą aksjomatów wyższych szczebli, jednak opatrzonych takimi ograniczeniami, przy których byłyby one do zaakceptowania dla intuicjonistów.

[27] Przykłady takich pojęć abstrakcyjnych to „zbiór", „funkcja liczb całkowitych", „dowodliwy" (to ostatnie w nieformalistycznym sensie „dający się poznać jako prawdziwy"), „wywodliwy" itd., a wreszcie „istnieje", w odniesieniu do wszelkich *możliwych* kombinacji symboli. Niezbędność takich pojęć dla dowodu niesprzeczności matematyki klasycznej wynika z faktu, że symbole można odwzorować w liczbach całkowitych, a przeto finitystyczna (i *a fortiori* klasyczna) teoria liczb zawiera wszystkie dowody oparte wyłącznie na nich. Racje przemawiające za tym faktem nie są jak na razie w pełni konkluzywne, gdyż oczywiste aksjomaty odnoszące się do rozważanego pojęcia nieabstrakcyjnego nie zostały jeszcze dość dokładnie zbadane. Sam fakt jednak przyznają nawet czołowi formaliści (Bernays, 1941, s. 144, 147; 1935, s. 68, 69; 1935b, s. 94; 1934, s. 2; Gentzen, 1937, s. 203).

wać w rozważaniach syntaktycznych[28]. Fakt, że im skromniejsze są aksjomaty, dla których chcemy uzyskać interpretację tautologiczną, tym mniej matematyki potrzebujemy, by to osiągnąć, ma tę konsekwencję, że gdy w końcu stajemy się tak skromni, iż ograniczamy się do pewnej dziedziny skończonej, np. liczb całkowitych do 1000, wówczas zdania matematyczne ważne w tej dziedzinie można zinterpretować tak, by okazywały się tautologiczne nawet w najściślejszym sensie, tj. sprowadzalne do wyraźnych tautologii za pomocą wyraźnych definicji terminów. Nic dziwnego, albowiem fragment matematyki niezbędny do dowodu niesprzeczności tej skończonej matematyki zawarty jest już w teorii skończonych procesów kombinatorycznych, niezbędnych do sprowadzenia jakiejś formuły do wyraźnej tautologii za pomocą podstawień. Tłumaczy to znany, choć mylący fakt, że formuły w rodzaju $5 + 7 = 12$ można za pomocą pewnych definicji sprowadzić do wyraźnych tautologii. Fakt ten jest mylący również z tego powodu, że w tych redukcjach (o ile interpretować je jako proste podstawienia *definiensu* za *definiendum* na podstawie wyraźnych definicji) + nie jest identyczny ze zwykłym +, ponieważ może być zdefiniowany tylko dla skończonej liczby argumentów (przez wyliczenie tej skończonej liczby przypadków). Jeżeli natomiast + definiuje się kontekstowo, to pojęcia skończonej rozmaitości trzeba użyć już w dowodzie $2 + 2 = 4$. Podobna kolistość pojawia się w dowodzie tego, że formuła $p \vee \sim p$ jest tautologią, ponieważ ewidentnie występują w niej alternatywa i negacja w swych intuicyjnych znaczeniach.

Istotą tego poglądu jest teza, że nie ma niczego takiego jak fakt matematyczny, że prawdziwość zdań, które w naszym przekonaniu wyrażają fakty matematyczne, znaczy jedynie, że (na mocy dość skomplikowanych reguł definiujących znaczenie zdań, tj. ustalających, w jakich okolicznościach dane zdanie jest prawdziwe) w zdaniach tych język pracuje na jałowym biegu, wspomniane reguły sprawiają bowiem, że

[28] Wysunięty tu zarzut przeciwko syntaktycznemu ugruntowaniu teorii liczb jest zasadniczo taki sam jak ten, który Poincaré wytoczył przeciwko ugruntowaniu teorii liczb przez Fregego i Hilberta. Zarzut ten nie jest jednak uzasadniony w odniesieniu do Fregego, ponieważ pojęcia i aksjomaty logiczne, które musi on zakładać, nie zawierają w sposób wyraźny pojęcia „skończonej rozmaitości" z jego aksjomatami, podczas gdy pojęcia i rozważania gramatyczne niezbędne do sformułowania reguł syntaktycznych i wykazania ich tautologicznego charakteru zawierają je.

są one prawdziwe bez względu na fakty. Zdania takie można trafnie nazwać pozbawionymi treści. Otóż faktycznie jest możliwe zbudowanie języka, w którym zdania matematyczne są w tym sensie pozbawione treści. Kłopot w tym jedynie, że:

1) w celu wykazania, że fakty matematyczne nie istnieją, trzeba odwołać się do tych samych (lub innych, równie skomplikowanych) faktów matematycznych;
2) zgodnie z tą metodą, jeżeli dany jest podział faktów empirycznych na dwie części *A* i *B* takie, że *B* nie ma żadnych konsekwencji w *A*, to można skonstruować język, w którym zdania wyrażające *B* byłyby pozbawione treści. A gdyby twój oponent powiedział: „Arbitralnie pomijasz pewne obserwowalne fakty *B*", można by odpowiedzieć: „Robisz to samo, np. z prawem indukcji zupełnej, które ja postrzegam jako prawdziwe na podstawie mojego rozumienia (tj. percepcji) pojęcia liczby całkowitej."

Mimo to wydaje mi się, że jeden składnik tej błędnej teorii prawdy matematycznej jest zupełnie słuszny i rzeczywiście odsłania naturę matematyki. Prawdą jest mianowicie, że zdanie matematyczne nie mówi niczego o rzeczywistości fizycznej czy psychicznej istniejącej w przestrzeni i czasie, gdyż jest prawdziwe na mocy znaczenia występujących w nim terminów, niezależnie od świata rzeczywistych przedmiotów. Błędne jest natomiast twierdzenie, że znaczenie terminów (tj. pojęcia, które one denotują) jest czymś wytworzonym przez człowieka i opartym wyłącznie na konwencjach semantycznych. Uważam, że naprawdę pojęcia te tworzą odrębną rzeczywistość, której nie możemy stwarzać ani zmieniać, a jedynie postrzegać i opisywać[29].

A zatem zdanie matematyczne, mimo iż nie mówi niczego o rzeczywistości czasoprzestrzennej, może jednak mieć niewątpliwą treść przedmiotową, gdyż mówi coś o relacjach pojęć. Istnienie innych niż „tautologiczne" relacji między pojęciami przejawia się nade wszystko

[29] Dotyczy to również tej części matematyki, którą można sprowadzić do reguł syntaktycznych (patrz wyżej). Reguły te są bowiem oparte na pojęciu skończonej rozmaitości (a mianowicie skończonego ciągu symboli), a to pojęcie i jego własności są całkowicie niezależne od naszego swobodnego wyboru. W istocie jego teoria jest równoważna teorii liczb całkowitych. Możliwość skonstruowania języka w taki sposób, by teoria ta była weń wbudowana w postaci reguł syntaktycznych, nie dowodzi niczego.

w okoliczności, że dla terminów pierwotnych matematyki należy przyjąć aksjomaty, które bynajmniej nie są tautologiami (nie są bowiem w żaden sposób sprowadzalne do $a = a$), a jednak wynikają ze znaczenia tych terminów pierwotnych. Przykładowo, podstawowy aksjomat, a raczej schemat aksjomatów, dla pojęcia zbioru liczb całkowitych mówi, że jeśli dana jest jakaś dobrze określona własność liczb całkowitych (tj. wyrażenie zdaniowe $\varphi(n)$ ze zmienną całkowitą n), to istnieje zbiór M liczb całkowitych posiadających własność φ. Otóż biorąc pod uwagę to, że również φ może zawierać termin „zbiór liczb całkowitych", otrzymujemy ciąg ściśle powiązanych aksjomatów dotyczących pojęcia zbioru. Aksjomatów tych jednak (jak pokazują wymienione wcześniej wyniki) nie można sprowadzić do niczego istotnie prostszego, a więc tym bardziej do wyraźnych tautologii. Wprawdzie aksjomaty te są ważne na mocy znaczenia terminu „zbiór", można wręcz powiedzieć, że wyrażają one znaczenie tego terminu, można je więc trafnie nazwać analitycznymi; jednak termin „tautologiczne", tj. pozbawione treści, jest w stosunku do nich zupełnie nie na miejscu, ponieważ nawet stwierdzenie istnienia pojęcia zbioru spełniającego te aksjomaty (czyli niesprzeczności tych aksjomatów) jest tak dalekie od bycia pustym, że nie można go udowodnić, nie używając znów pojęcia zbioru lub jakiegoś innego pojęcia abstrakcyjnego o podobnym charakterze.

Argument ten jest oczywiście adresowany tylko do matematyków akceptujących ogólne pojęcie zbioru w matematyce właściwej. Jednak w stosunku do finitystów można by wysunąć dosłownie taki sam argument w odniesieniu do pojęcia liczby całkowitej i aksjomatu indukcji zupełnej. Jeżeli bowiem n i e przyjmujemy ogólnego pojęcia zbioru w matematyce właściwej, to musimy jako aksjomat przyjąć indukcję zupełną.

Pragnę powtórzyć, że „analityczny" nie znaczy tutaj „prawdziwy na mocy definicji", lecz „prawdziwy na mocy natury pojęć", w odróżnieniu od „prawdziwy na mocy własności i zachowania rzeczy". To pojęcie analityczności jest tak dalekie od pojęcia „pozbawiony treści", że jest w pełni możliwe, by jakieś zdanie analityczne było nierozstrzygalne (lub rozstrzygalne tylko z pewnym prawdopodobieństwem). Nasza znajomość świata pojęć może być bowiem równie ograniczona i niepełna, jak nasza znajomość świata rzeczy. Z pewnością nie da się zaprzeczyć, że w pewnych przypadkach wiedza ta jest nie tylko niepełna, lecz nawet niewyraźna. Przejawia się to w paradoksach teorii mnogości, które często przytacza się jako obalenie platonizmu, choć moim zdaniem zupełnie niesłusznie. Nasze postrzeżenia wzrokowe często przeczą naszym spostrzeżeniom dotykowym, jak w przypadku pręta zanurzonego w wodzie, a przecież nikt przy zdrowych zmysłach nie wyciąga stąd wniosku, że świat zewnętrzny nie istnieje.

Celowo mówię o dwóch odrębnych światach (świecie rzeczy i świecie pojęć), nie sądzę bowiem, by Arystotelesowski realizm (zgodnie z którym pojęcia są częściami czy aspektami rzeczy) dał się utrzymać.

Nie twierdzę oczywiście, że dotychczasowe rozważania dostarczają prawdziwego dowodu słuszności tego poglądu na naturę matematyki. Mógłbym co najwyżej powiedzieć, że obaliłem pogląd nominalistyczny, zgodnie z którym matematyka zasadza się wyłącznie na konwencjach syntaktycznych i ich konsekwencjach. Ponadto wysunąłem kilka mocnych argumentów przeciwko ogólniejszemu poglądowi, że matematyka jest naszym własnym wytworem. Istnieją jednak inne alternatywy wobec platonizmu, w szczególności psychologizm i realizm Arystotelesowski. W celu uzasadnienia realizmu Platońskiego należałoby te inne teorie obalić jedną po drugiej, a następnie pokazać, że wyczerpują one wszystkie możliwości. Nie jestem w stanie teraz tego uczynić, chciałbym jednak sformułować kilka wskazówek zmierzających w tym kierunku. Jedna z możliwych form psychologizmu akcentuje to, że matematyka bada relacje między pojęciami i że pojęć nie możemy dowolnie tworzyć, lecz są nam one dane jako pewna realność, której nie możemy zmieniać; zarazem jednak utrzymuje on, że pojęcia te są jedynie dyspozycjami psychicznymi, tj., by tak rzec, jedynie kółkami w naszej maszynie myślącej. By ująć to ściślej, pojęcie sprowadzałoby się do dyspozycji:

1) do posiadania pewnego określonego doświadczenia umysłowego, gdy myślimy o nim

oraz

2) do wydawania pewnych sądów (lub posiadania pewnych doświadczeń należących do wiedzy bezpośredniej) na temat jego relacji do innych pojęć lub przedmiotów empirycznych.

Istotą tego psychologistycznego poglądu jest to, że przedmiotem matematyki są jedynie prawa psychologiczne rządzące pojawianiem się w nas myśli, przekonań itd., w takim samym sensie, w jakim przedmiotem pewnej innej części psychologii są prawa, zgodnie z którymi pojawiają się w nas emocje. W chwili obecnej głównym zarzutem pod adresem tego poglądu wydaje mi się to, że gdyby był on trafny, nie mielibyśmy żadnej wiedzy matematycznej. Nie wiedzielibyśmy np., że 2 + 2 = 4, lecz tylko tyle, że nasz umysł jest tak skonstruowany, że uważa to za prawdę, a wtedy nie istniałby żaden powód, dla którego jakiś inny tok myśli nie mógłby nas doprowadzić z tym samym stopniem pewności do przeciwnego wniosku. Ktokolwiek zatem zakłada, że istnieje choćby najmniejsza dziedzina zdań matematycznych, o których wiemy, że są prawdziwe, nie może przyjmować tego poglądu.

Mam wrażenie, że po należytym rozjaśnieniu wchodzących tu w grę pojęć możliwe będzie prowadzenie tych dyskusji z matematyczną ścisłością, i że ich wynik (przy pewnych założeniach, które trudno podważyć, w szczególności że istnieje w ogóle coś takiego jak wiedza matematyczna) będzie taki, że jedynym dającym się utrzymać poglądem jest platonizm. Rozumiem przez to pogląd, że matematyka opisuje pewną niezmysłową rzeczywistość, istniejącą niezależnie zarówno od czynności, jak i dyspozycji ludzkiego umysłu i dającą się przez ludzki umysł jedynie postrzegać, i to postrzegać w sposób wysoce niepełny. Pogląd ten jest raczej mało popularny wśród matematyków, choć wśród wielkich matematyków zdarzają się jednak tacy, którzy go przyjmują, na przykład Hermite, który napisał kiedyś następujące zdanie:

> Il existe, si je ne me trompe, tout un monde qui est l'ensemble des vérités mathématiques, dans lequel nous n'avons accés que par l'intelligence, comme existe le monde des réalités physiques; l'un et l'autre indépendants de nous, tous deux de création divine (Darboux, 1912, s. 142)[30].

Przełożył Marcin Poręba[*]

BIBLIOGRAFIA

Carnap, R. (1935). Formalwissenschaft und Realwissenschaft. *Erkenntnis*, *5*, 30–37.
Carnap, R. (1937). *The logical syntax of language*, Oxford: Harcourt, Brace.

[30] „Istnieje, jeśli się nie mylę, cały świat będący zbiorem prawd matematycznych, do którego mamy dostęp wyłącznie za sprawą naszej inteligencji, tak samo jak istnieje świat złożony z przedmiotów fizycznych; oba światy są od nas niezależne i stanowią twór boski".

[*] Uniwersytet Warszawski, Instytut Filozofii, e-mail: m.poreba@uw.edu.pl, ORCID: 0000-0002-8843-0894.

Bernays, P. (1935). Sur le platonisme dans les mathématiques. *L'Enseignement Mathématique*, *34*, 52–69.

Bernays, P. (1935b). Quelques points essentiels de la métamathématique. *L'Enseignement Mathématique*, *34*, 70–95.

Bernays, P. (1941). Sur les questions métodologiques actuelles de la théorie hilbertienne de la démonstration. W : F. Gonseth (red.), *Les Entretiens de Zurich sur les fondements el la méthode des sciences malhématiques, 6-9 décembre 1938* (s. 144–152). Zurich: Leemann.

Darboux, G. (1912). *Éloges académiques et discours*. Paris: Librairie scientifique A. Hermann et fils.

Gentzen, G. (1937). Unendlichkeitsbegriff und Widerspruchsfreiheit der Mathematik. *Actualités scientifiques et industrielles*, *535*, 201–205.

Gödel, K. (1995). Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and Their Implications. W: S. Feferman i in. (red.), *Kurt Gödel: Collected Works, Vol. III* (s. 304–323). Oxford: Oxford University Press.

Hahn, H. (1935). Logique, mathématiques et connaissance de la réalité. *Actualités scientifiques et industrielles*, *226*.

Hilbert, D., Bernays, P. (1934). *Grundlagen der Mathematik, Vol. I*. Springer, Berlin.

Menger, K. (1930). Der Intuitionismus. *Blätter für deutsche Philosophie*, *4*, 311–325.

Ramsey, F. P. (1926). The Foundations of Mathematics. *Proceedings of the London Mathematical Society*, *s2–25*(1), 338–384.

Rosser, B. (1936). Extensions of Some Theorems of Gödel and Church, *The Journal of Symbolic Logic*, *1*(3), 87–91.